Tesis de Doctorado

Acciones parciales propias

Autor:
Damián Ferraro

Directores de Tesis:
Dr. Alcides Buss
Dr. Fernando Abadie (co-Director)

Director Académico:
Dr. Fernando Abadie

Tesis sometida a evaluación del Programa PEDECIBA-UdelaR para la obtención del título de Doctor en Matemática

15 de febrero de 2016

If you don't know what you are doing, any road will get you there.

Lewis Carrol

El camino es la recompesa.

Óscar Washington Tabárez

PEDECIBA - UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
CENUR Litoral Norte
Departamento de Matemática y Estadística del Litoral

Resumen

Acciones parciales propias

Damián Ferraro

El objetivo final de este trabajo es lograr enunciar y mostrar, en el contexto de las acciones parciales, algunos de los Teoremas de Imprimitividad ya conocidos para acciones en C*-álgebras (como el Teorema de Imprimitividad de Raeburn [Rae88]). Con tal fin se estudian las posibles definiciones de acción propia en una C*-álgebra (en especial las de Buss-Echterhoff, Kasparov y Meyer [BE13, Kas88, Mey, Mey01]) para traducirlas al contexto de las acciones parciales. Los teoremas de imprimitividad para acciones parciales aquí incluidos son una generalización de los resultados de Buss y Echterhoff, y son demostrados utilizando la noción de F. Abadie [Aba03] de equivalencia de Morita de acciones parciales, tal como lo hacen Curto, Muhly y Williams en [CMW84] para las acciones globales. Para lidiar más fácilmente con los productos cruzados por acciones parciales, dedicamos una parte del trabajo a estudiar una noción de equivalencia entre fibrados de Fell que implica la equivalencia de Morita entre las C*-álgebras seccionales. Otro punto importante de la tesis es el estudio de la globalización de acciones parciales en C*-álgebras y en módulos de Hilbert. Damos una condición necesaria y suficiente para la existencia de una globalización, la cual usamos para estudiar cuáles de las posibles definiciones de acción parcial propia (en una C*-álgebra) implica la existencia de una globalización.

PEDECIBA - UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
CENUR Litoral Norte
Departamento de Matemática y Estadística del Litoral

Abstract

Acciones parciales propias
(Proper partial actions)

Damián Ferraro

The final goal of this work is to state and prove, in the context of partial actions, some of the well known imprimitivity theorems (as Raeburn's Symmetric Imprimitivity Theorem [Rae88]). To that end we study several notions of proper action on C*- algebras (specially those of Buss-Echterhoff, Kasparov and Meyer [BE13, Kas88, Mey, Mey01]) and show how to translate them to the realm of partial actions. Our imprimitivity theorems for partial actions are a direct generalization of those of Buss and Echterhoff. We prove them using F.Abadie's notion of Morita equivalence for partial actions [Aba03], as has been done by Curto, Muhly y Williams for global actions [CMW84]. To deal with crossed products by partial actions we include a chapter were we develop a notion of Morita equivalence for Fell bundles and show that this induces a Morita equivalence between the correspondig cross-sectional C*-algebras. Another important topic is the study of globalizations of partial actions on C*-algebras and Hilbert modules. We give a necessary and sufficient condition for the existence of a globalization and use this criteria to study when our proper partial actions (on a C*-algebra) admit a globalization.

Índice general

Introducción

Cuando queremos contar a alguien un viaje que hemos hecho seguramente lo primero que le comunicamos es a dónde fuimos, y no cómo hicimos para llegar (aunque a veces no importa a dónde sino cómo). De manera similar creemos que lo más conveniente es contarle al lector primero el final y luego el principio.

El objetivo de este trabajo es estudiar las diferentes definiciones de acciones propias en C*-álgebras y tratar de llevarlas al contexto de las acciones parciales. Los intentos de traducción del concepto de acción propia en un espacio topológico al de acción propia en una C*-álgebra, estuvieron siempre ligados a la obtención de teoremas de imprimitividad. Así que dentro del objetivo final también está lograr mostrar teoremas de ese tipo para acciones parciales.

La palabra "imprimitividad" no aparece en el diccionario de la Real Academia Española pero la usaremos en este trabajo para referirnos a no tener la cualidad de ser primitivo. Esa palabra es una traducción de *imprimitivity*, la cual (en el contexto que nos interesa) surge en la búsqueda de representaciones no primitivas de grupos.

Como lo explica Mackey en [Mac49] las representaciones imprimitivas de un grupo son aquellas que provienen (en cierto sentido) de representaciones de subgrupos (ver [Rie74, pág. 178]). Desde sus inicios, la Teoría de Equivalencia de Morita para C*-álgebras [Rie74] estuvo relacionada a los Teoremas de Imprimitividad de Mackey, por lo que el término *imprimitivity* pasó a teoremas sobre equivalencia de Morita que involucraban C*-álgebras de grupos. Posteriormente Green mostró [Rie82] que tales teoremas eran casos particulares de otros en los que intervenían dos grupos (topológicos de Hausdorff y localmente compactos, HLC) actuando por acciones libres, propias y que conmutan. Los resultados de Green fueron generalizados por Raeburn [Rae88] y Kasparov [Kas88][1]. Desde ese entonces se ha dedicado mucho esfuerzo a generalizarlos y la expresión "Teorema de Imprimitividad" se ha adoptado para referirse a resultados similares a los de

[1]Ambos trabajos datan del año 1988 y no se mencionan mutuamente. Suponemos que los teoremas de equivalencia de Morita de productos cruzados fueron descubiertos independientemente, siendo los de Raeburn más generales.

Raeburn. Incluso se ha intentado llevar este tipo de resultados al contexto de los grupoides [MRW87].

Desde la formulación de Green estuvo claro que la presencia de las acciones propias en espacios topológicos era un punto clave. Por ese motivo Rieffel intentó llevar el concepto de acción parcial propia de los espacios topológicos a las C*-álgebras [Rie90]. Para explicar mejor esta idea recordemos qué es una acción propia y cómo sería la traducción de ese concepto a las C*-álgebras.

Supongamos que X es un espacio HLC y llamemos $C_0(X)$ al conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ que se anulan en infinito. Dicho conjunto es una C*-álgebra conmutativa con las operaciones punto a punto y la norma del supremo. El Teorema de Gelfand-Naimark establece que toda C*-álgebra conmutativa se obtiene de esta manera. Tomemos ahora una acción (continua) de un grupo topológico HLC G en X, $\sigma\colon G \times X \to X$ con la notación $(t,x) \mapsto \sigma_t(x)$. Ella define una acción de G por automorfismos $\Theta(\sigma)\colon G \times C_0(X) \to C_0(X) \to C_0(X)$, $(t,a) \mapsto f \circ \sigma_{t^{-1}}$. Ahora bien, se dice que σ es propia si para todo par de compactos $K, L \subset X$ el conjunto $((K,L)) := \{t \in G\colon \sigma_t(K) \cap L \neq \emptyset\}$ es compacto en G. La idea básica para lograr la traducción es encontrar una propiedad P para $\Theta(\sigma)$ de forma que σ es propia si y solamente si $\Theta(\sigma)$ tiene la propiedad P. Es importante requerir que P no haga uso del hecho de que $C_0(X)$ es conmutativa, sino sólo de su estructura de C*-álgebra. De esa manera P puede enunciarse para toda acción por automorfismos de G en una C*-álgebra (conmutativa o no) y se ha logrado <u>una</u> interpretación del concepto de acción propia a las C*-álgebras. Enfatizamos que se ha logrado una interpretación porque podría existir una propiedad Q (distinta de P) para acciones de G por automorfismos de forma que $\Theta(\sigma)$ tiene la propiedad Q si y solamente si σ es propia[2]. Así P y Q "coinciden en el caso conmutativo" pero no en general. Ejemplos de traducciones del concepto de acción propia se encuentran en [Kas88, Rie90, Rie04, Exe00, Mey, Mey01, BE13]. No todas esas traducciones son equivalentes. Por nombrar un ejemplo el concepto de acción Kasparov propia (originado en [Kas88]) no coincide con el de acción débilmente propia (*weakly proper* en [BE13]) porque las acciones de la primera clase son promediables[3] y, sin embargo, existen acciones débilmente propias no promediables.

El punto de vista adoptado en [Rie90] es ligeramente diferente, en opinión de quien escribe. Para explicar nuestra interpretación tomemos una acción propia σ de G en X. Es un hecho conocido que el espacio de $\sigma-$órbitas X/G es HLC, por lo que $C_0(X/G)$ es una C*-álgebra. Por otro lado el producto cruzado asociado a σ es, de por sí, construido a partir de $\Theta(\sigma)$ sin utilizar la conmutatividad de $C_0(X)$, así que no se necesita una

[2] Esto es similar a la propiedad de "ser compacto" y de "ser secuencialmente compacto". Son propiedades diferentes para los espacios topológicos en general que coinciden en los espacios métricos.

[3] Traduciremos *amenable* como promediable.

traducción del producto cruzado $C_0(X) \rtimes G$. Como se describe en [Rie90] $C_0(X/G)$ es equivalente Morita a un ideal I de $C_0(X) \rtimes G$. La pregunta es ¿cómo se construyen $C_0(X/G)$ y el bimódulo de equivalencia en términos de $\Theta(\sigma)$? Para responder a la pregunta deben hacerse algunas hipótesis acerca de $\Theta(\sigma)$ (siempre dejando de lado la conmutatividad) que permitan construir un bimódulo. Luego se dirá que una acción por automorfismos es propia si cumple aquellas hipótesis. Este punto de vista es muy interesante pues la propia definición de "acción propia por automorfismos" implica la existencia de un objeto análogo a $C_0(X/G)$ y de un bimódulo de equivalencia. Así el teorema de imprimitividad obtenido es una consecuencia más o menos directa de la definición que se ha logrado. En gran medida ese es el enfoque adoptado en esta tesis. Probaremos los teoremas de imprimitividad adoptando una definición de "acción (parcial) propia por automorfismos" que permita la construcción de un bimódulo de equivalencia. Los teoremas de imprimitividad que demostraremos en el Capítulo 5 siguen la regla: "bajo las hipótesis (a) (b) ... se puede construir el objeto $\mathcal{X}$ que es un $A-B-$bimódulo de equivalencia de Morita".

Hasta ahora poco o nada hemos dicho de las acciones parciales. La motivación para buscar teoremas de imprimitividad para acciones parciales surge de que tales acciones son utilizadas para describir algunas clases de C*-álgebras como productos cruzados de acciones parciales [Exe94c, Exe94b, Exe94a, Exe95, EL99, ELQ02] (ver también [Exe00] en combinación con [Exe14, II 27]). Así que naturalmente uno puede esperar usar los teoremas de imprimitividad para acciones parciales en esas clases de C*-álgebras.

Los resultados de F. Abadie y L. Martí [Aba03, AMP09] establecen que todo producto cruzado de una acción parcial es equivalente Morita a un producto cruzado de una acción global. Por ese motivo desde el inicio de la elaboración de este trabajo una pregunta que se intentó responder es si los teoremas de imprimitividad que se obtuvieran para acciones parciales no serían consecuencias de teoremas ya conocidos para acciones globales. El pasaje de lo parcial a lo global podía encontrarse, al menos en principio, utilizando globalización de acciones parciales directamente o utilizando globalización de acciones a menos de equivalencia de Morita [Aba03]. El segundo camino parecía poco factible porque en los teoremas de imprimitividad de Buss y Echterhoff se trabaja con acciones débilmente propias, y la propiedad de ser débilmente propia no se preserva a por la equivalencia de Morita de acciones. Así que esto nos dejaba en la situación de intentar globalizar directamente las acciones parciales, lo que nos llevó a buscar un criterio para determinar cuándo una acción parcial en una C*-álgebra admite una globalización.

En este punto hemos explicado casi todos temas que motivaron cada uno de los Capítulos de este trabajo, así que pasamos a describir los mismos. Únicamente nos queda explicar por qué dedicamos un capítulo a los fibrados de Fell. Los motivos son varios. El primero es que cada acción parcial tiene asociado un fibrado de Fell de forma que el producto cruzado de la acción es la C*-álgebra seccional del fibrado [Exe97]. Por otro lado en [Aba03, AMP09] se muestran teoremas de equivalencia de Morita para C*-álgebras seccionales de fibrados de Fell y se relaciona la equivalencia de Morita de acciones parciales con los fibrados de Fell. Además, como se explica en [CMW84, Kas88], los teoremas de imprimitividad pueden obtenerse como consecuencia de la equivalencia de Morita de ciertas acciones. Todo esto aún no justifica por qué hemos decidido trabajar en fibrados de Fell en general y no sólo en fibrados provenientes de acciones parciales en módulos de Hilbert. La razón es que todos los argumentos usados podían ser expresados para fibrados en general sin necesidad de cambiar nada y, por otro lado, se ganaba en generalidad simplificando la notación.

Ahora sí hemos tocado cada uno de los temas que se tratan en esta tesis, por lo que pasamos a describir su contenido.

El inicio del primer capítulo es una introducción a la teoría de acciones parciales, que también usamos para fijar la notación y presentar la mayoría de los objetos que usaremos. Sobre el final del capítulo estudiamos las diferencias y similitudes entre globalizar una acción parcial en un espacio topológico, en una C*-álgebra o en un módulo de Hilbert.

En el segundo Capítulo trabajamos con fibrados de Fell y nos enfocamos en establecer isomorfismos o equivalencias de Morita entre sus C*-álgebras seccionales. También introducimos las acciones parciales que conmutan y con ellas construimos acciones parciales del producto de los grupos en cuestión y acciones parciales en productos cruzados (tal como se hace para las acciones globales). El lector familiarizado con este tipo de objetos encontrará que las definiciones que usamos no son originales, sino que fueron tomadas directamente (o son leves modificaciones) de las que aparecen en la literatura oportunamente citada.

Los resultados principales del tercer capítulo son dos teoremas que dan condiciones necesarias y suficientes para poder globalizar, por un lado, una acción parcial en una C*-álgebra y, por otro, una acción parcial en un módulo de Hilbert. Sobre el final del capítulo se encuentran varios resultados técnicos de extensión de operadores. Dichos resultados no son usados hasta el final del Capítulo 4 para tratar temas relacionados a la restricción de "acciones parciales propias" en C*-álgebras[4].

En el cuarto capítulo exploramos el concepto de acción parcial propia en espacios topológicos e intentamos llevarlo a las acciones parciales en módulos de Hilbert basándonos en los trabajos de Meyer [Mey, Mey01]. La clave para eso son las acciones parciales cuadrado integrables„ que son una extensión natural de las *square integrable actions* de Meyer.

[4]Las comillas porque el concepto *acción parcial propia* en una C*-álgebra es poco preciso en este punto.

Varios son los temas que nos ocupan en esta parte. Específicamente trabajamos con acciones parciales cuadrado integrables en C*-álgebras conmutativas mostrando que ellas siempre admiten una globalización (también cuadrado integrable) y que son, exactamente, las que provienen de acciones parciales propias en espacios HLC. Posteriormente nos ocupamos de dar condiciones de cuándo una acción parcial cuadrado integrable (en una C*-álgebra) admite una globalización (que, en todo caso, será cuadrado integrable). Al final del capítulo trabajamos con acciones parciales cuadrado integrables en C*-álgebras unitales, acciones que no pueden ser globales si el grupo en cuestión no es compacto. Damos un teorema que establece cuáles son (todas) las posibles acciones parciales cuadrado integrables de grupos discretos y libres de torsión en C*-álgebras unitales.

Finalmente, en el Capítulo 5, trabajamos con otras dos posibles traducciones del concepto de acción parcial propia: las acciones parciales Kasparov propias y las débilmente propias. En la segunda parte del capítulo utilizamos estas últimas para probar nuestros teoremas de imprimitividad.

Como anexo hemos incluido dos apéndices, uno relacionado a los fibrados de Banach y otro a la equivalencia de Morita de C*-álgebras. El primero contiene algunos resultados usados en la tesis de los cuales no encontramos una referencia directa. En el segundo reproducimos algunas ideas de cómo pensar la equivalencia de Morita debidas a F. Abadie, las que aún no han sido publicadas.

Capítulo 1

Acciones parciales

En este primer capítulo recordamos las definiciones básicas, lo que nos servirá para introducir la notación. En el final analizaremos algunos aspectos relacionados a la globalización de acciones parciales en espacios topológicos, en C*-álgebras y en módulos de Hilbert. Estos son, a no ser por un ejemplo aislado, los únicos tipos de acciones parciales que estudiaremos en esta tesis.

Siempre que sea posible trabajaremos en un contexto general, en especial en lo relativo a las globalizaciones, donde veremos que la noción de globalización depende (únicamente) de las restricciones y los isomorfismos.

Seguramente el lector percibirá que no hemos seguido completamente la notación de los textos que citamos. Esto tiene dos razones fundamentales. Por un lado mantener la notación nos llevaría a denotar de manera diferente conceptos que pensamos como iguales. Por otro lado cada notación enfatiza aquello que se considera relevante; así que nuestro cambio de notación también se debe a que deseamos resaltar aspectos diferentes a los tratados en los textos que citaremos.

La expresión "acción parcial" será seguida por otra (secundaria) que indica el contexto en que trabajamos. Comenzamos por la definición fundamental.

Definición 1.1 ([Exe94c, McC95, Exe97])**.** Diremos que σ es una *acción parcial en conjuntos* de G en X si G es un grupo, X es un conjunto no vacío y $\sigma = (\{\sigma_t\}_{t\in G}, \{X_t\}_{t\in G})$ cumple las siguientes condiciones:

(1) Para todo $t \in G$, X_t es un subconjunto de X y $X_e = X$, siendo e la unidad de G.

(2) Para todo $t \in G$, $\sigma_t \colon X_{t^{-1}} \to X_t$ es una función y $\sigma_e = \mathrm{id}_X$ (la identidad).

(3) Dados $s, t \in G$ y $x \in X_{t^{-1}} \cap X_{t^{-1}s^{-1}}$ se cumple que $\sigma_t(x) \in X_{s^{-1}}$ y $\sigma_s(\sigma_t(x)) = \sigma_{st}(x)$.

El conjunto $\Gamma_\sigma := \{(t,x) \in G \times X : x \in X_{t^{-1}}\}$ es el *dominio* de σ. La *evaluación* de σ es la función $\mathrm{ev}_\sigma\colon \Gamma_\sigma \to X$, $\mathrm{ev}_\sigma(t,x) = \sigma_t(x)$ y el *gráfico* de σ es el conjunto $\mathrm{Gr}(\sigma) := \{(t,x,y) \in G \times X \times X : x \in X_{t^{-1}},\ y = \sigma_t(x)\}$. Diremos que σ es una *acción global* (o simplemente una acción) si $\Gamma_\sigma = G \times X$.

Observación 1.2. La Definición anterior es equivalente a la Definición 2.1 de [Exe14]. Por lo tanto las Proposiciones 2.4-2.6 de ese texto implican que σ_t es invertible, ${\sigma_t}^{-1} = \sigma_{t^{-1}}$ y $\sigma_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = X_t \cap X_{ts}$, para todo $s,t \in G$.

Dadas acciones parciales en conjuntos, σ y τ, de G en X e Y, respectivamente, un *morfismo de acciones parciales en conjuntos* $f\colon \sigma \to \tau$ es una función $f\colon X \to Y$ tal que para todo $t \in G$: (i) $f(X_t) \subset Y_t$ y (ii) para todo $x \in X_{t^{-1}}$, $\tau_t(f(x)) = f(\sigma_t(x))$. La composición de morfismos es la composición de funciones y el morfismo identidad de σ, id_σ, es la identidad de X.

Observación 1.3. Una vez que hemos definido la composición de morfismos y el morfismo identidad asociado a una acción parcial (en este caso en conjuntos) queda definida la noción de isomorfismo. Diremos que σ es isomorfo a τ si existen morfismos $f\colon \sigma \to \tau$ y $g\colon \tau \to \sigma$ de manera que $g \circ f = \mathrm{id}_\sigma$ y $f \circ g = \mathrm{id}_\tau$. Esta Observación será válida en cada uno de los contextos que trabajaremos.

El siguiente es un ejemplo de [Exe94c]. La primera Definición explícita de una acción parcial fue dada por Mc Clanahan en [McC95] y es posterior a él.

Ejemplo 1.1. Dados un conjunto X y funciones entre subconjuntos de X, $f\colon Y \to Z$ y $g\colon U \to V$, la función $g \circ f$ es aquella con dominio $f^{-1}(Z \cap U)$, codominio $g(U \cap Z)$ y que en $x \in f^{-1}(Z \cap U)$ vale $g(f(x))$. Tomemos un conjunto X y una biyección entre subconjuntos de X, $f\colon U \to V$. La acción parcial $\sigma = (\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ se define recursivamente como: $\sigma_0 = \mathrm{id}_X$, $\sigma_{n+1} = \sigma_n \circ f$ y $\sigma_{-n-1} = \sigma_{-n} \circ f^{-1}$ $(n > 0)$.

Lema 1.4. *Sean σ y τ acciones parciales en conjuntos de G en X e Y, respectivamente, y $f\colon \sigma \to \tau$ un morfismo. Luego f es un isomorfismo de acciones parciales en conjuntos si y solamente si: (i) $f(X_t) = Y_t$ para todo $t \in G$ y (ii) f es biyectiva como función de X en Y.*

Demostración. Si $g\colon \tau \to \sigma$ es el morfismo inverso de f entonces es la función inversa de f y por lo tanto f es biyectiva. Además para todo $t \in G$ $f(X_t) \subset Y_t = f \circ g(Y_t) \subset f(X_t)$.

Recíprocamente veamos que la función inversa de f es un morfismo de acciones parciales en conjuntos. Para cada $t \in G$ $f^{-1}(Y_t) = f^{-1}(f(X_t)) = X_t$. Además, para todo $y \in Y_{t^{-1}}$

$$f^{-1}(\tau_t(y)) = f^{-1}(\tau_t(f(f^{-1}(y)))) = f^{-1} \circ f(\sigma_t(f^{-1}(y))) = \sigma_t(f^{-1}(y)).$$

Luego $f^{-1}\colon \tau \to \sigma$ es un morfismo de acciones parciales y f es un isomorfismo. $\square$

La *$\sigma-$órbita* de $U \subset X$ es $\sigma U := \cup_{t\in G}\sigma_t(X_{t^{-1}} \cap U)$ y se dice que U es *$\sigma-$invariante* si $\sigma U \subset U$ o, equivalentemente, si $\sigma U = U$. La órbita de U es el menor subconjunto $\sigma-$invariante que contiene a U.

1.1. En espacios topológicos

Supongamos que σ es una acción parcial en conjuntos de G en X, que G es un grupo topológico y que X es un espacio topológico. A menos que se indique explícitamente lo contrario la topología del dominio de σ es la relativa a la topología producto de $G \times X$.

En varios contextos (espacios topológicos, C*-álgebras, módulos de Hilbert) estamos interesados en requerir que la evaluación de σ sea una función continua. Pero sólo en las acciones parciales topológicas nos interesa que el dominio de σ sea abierto en $G\times X$. Por esto distinguimos entre acciones parciales continuas y acciones parciales topológicas.

Definición 1.5. Diremos que σ es una *acción parcial continua* de G en X si G es un grupo topológico, X es un espacio topológico y σ una acción parcial en conjuntos de G en X de manera que la evaluación $\mathrm{ev}_\sigma \colon \Gamma_\sigma \to X$ es continua. Una acción *acción parcial topológica* de G en X es una acción parcial continua de G en X tal que su dominio es abierto en $G\times X$. Finalmente, diremos que σ es una *acción parcial HLC* de G en X si es una acción parcial topológica y las topologías de G y X son de Hausdorff y localmente compactas (HLC).

Observación 1.6. Toda acción parcial en conjuntos, σ de G en X, puede pensarse como una acción parcial HLC considerando en G y X las topologías discretas.

Definición 1.7. Dadas acciones parciales continuas, σ y τ de G en X e Y, un *morfismo de acciones parciales continuas* $f\colon \sigma \to \tau$ es un morfismo de acciones en conjuntos que es continuo como función de X en Y. Los morfismos entre acciones parciales topológicas (o HLC) son los morfismos en tanto acciones parciales continuas.

Observación 1.8. Si σ es una acción parcial topológica de G en X entonces cada X_t es abierto en X y para cada compacto $K \subset X$ el conjunto $\{s \in G\colon K \subset X_s\}$ es un abierto que contiene a la identidad de G.

Uno de los conceptos fundamentales en acciones parciales es la restricción, también es una manera general de obtener acciones parciales a partir de acciones globales.

Lema 1.9. *Sean σ una acción parcial en conjuntos de G en X e Y un subconjunto de X. Si para cada $t \in G$ se define $Y_t := Y \cap \sigma_t(Y \cap X_{t^{-1}})$ entonces $\sigma_t(Y_{t^{-1}}) = Y_t$. Además, si $\tau_t\colon Y_{t^{-1}} \to Y_t$ es la restricción de σ_t entonces $\sigma|_Y := (\{\tau_t\}_{t\in G}, \{Y_t\}_{t\in G})$ es una acción* *parcial en conjuntos de G en Y. En caso que σ sea una acción parcial continua también lo será $\sigma|_Y$; y si σ es una acción parcial topológica (HLC) e Y abierto entonces $\sigma|_Y$ es una acción parcial topológica (HLC).*

Demostración. Para cualquier $t \in G$ se tiene que $Y_{t^{-1}} = \sigma_{t^{-1}}(Y \cap X_t) \cap Y \cap X_{t^{-1}}$. Por lo tanto $\sigma_t(Y_{t^{-1}}) = Y \cap X_t \cap \sigma_t(Y \cap X_{t^{-1}}) = Y_t$.

Para simplificar la notación llamaremos τ a $\sigma|_Y$. Es claro que τ satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición de acción parcial en conjuntos. Para verificar la tercera tomemos $s, t \in G$ e $y \in Y_{t^{-1}} \cap Y_{t^{-1}s^{-1}}$. Luego $\tau_t(y) = \sigma_t(y) \in \sigma_t(Y_{t^{-1}} \cap Y_{t^{-1}s^{-1}}) \subset X_t \cap X_{s^{-1}} \cap Y$. Además $\sigma_s(\tau_t(y)) = \sigma_s(\sigma_t(y)) = \sigma_{st}(y) \in Y$ y $\tau_t(y) \in Y \cap \sigma_{s^{-1}}(X_s \cap Y) = Y_{s^{-1}}$. Finalmente $\tau_s(\tau_t(y)) = \sigma_s(\sigma_t(y)) = \sigma_{st}(y) = \tau_{st}(y)$.

Habiendo mostrado que τ es una acción parcial en conjuntos nos ocuparemos de la continuidad. La definición de τ nos dice que $\Gamma_\tau \subset \Gamma_\sigma$ y la topología de Γ_τ relativa a $G \times Y$ es la topología de Γ_τ relativa a Γ_σ. Además $\mathrm{ev}_\tau = \mathrm{ev}_\sigma|_{\Gamma_\tau}$, lo que implica que τ es continua si σ lo es. Supongamos ahora que Y es abierto en X y σ es una acción parcial topológica. En este caso Γ_τ es abierto en $G \times Y$ pues $\Gamma_\tau = (G \times Y) \cap \mathrm{ev}_\sigma^{-1}(Y)$. Finalmente, si σ es una acción parcial HLC e Y es abierto en X entonces la topología relativa de Y es HLC. $\square$

Definición 1.10. La *restricción* de σ a Y es la acción parcial $\sigma|_Y$ del Lema anterior.

Ejemplo 1.2 ([Exe94c]). Tomemos un espacio HLC X y un homeomorfismo entre abiertos de X, $f\colon Y \to Z$. La acción parcial σ construida como en el Ejemplo 1.1 es una acción parcial HLC.

Los siguientes dos ejemplos son algo particulares pero sencillos. Serán utilizados en capítulos siguientes como contra-ejemplo.

Ejemplo 1.3. En $X = (0,1] \cup [2,4] \cup [5,6)$ llamemos σ a la acción parcial de $\mathbb{Z}$ construida a partir del homeomorfismo $f\colon (0,1] \cup [2,3) \to (3,4] \cup [5,6)$, $f(x) = x+3$. Esta acción puede pensarse como la restricción a X de la acción de $\mathbb{Z}$ en $Y := \cup_{m \in \mathbb{Z}}[2+3m, 4+3m] \subset \mathbb{R}$ definida por el homeomorfismo $g\colon Y \to Y$, $g(y) = y+3$.

Ejemplo 1.4. En $X = (0,1] \cup [2,4] \cup [5,6)$ llamemos τ a la acción parcial de $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ tal que $\tau_0 = \mathrm{id}_X$ y $\tau_1\colon (0,1] \cup [2,3) \cup (3,4] \cup [5,6) \to (0,1] \cup [2,3) \cup (3,4] \cup [5,6)$ consiste en simetrizar con respecto a $3/2$ en $(0,1] \cup [2,3)$ y con respecto a $9/2$ en $(3,4] \cup [5,6)$. Es decir $\tau_1(x) = 3 - x$ si $x < 3$ y $\tau_1(x) = 9 - x$ si $x > 3$. Esta acción parcial puede pensarse como la restricción de una acción global de $\mathbb{Z}_2$ en la compactificación por un punto de X, X_∞. Basta con extender τ_1 a X_∞ mediante $\tau_1(3) = \infty$ y $\tau_1(\infty) = 3$.

Lema 1.11. *Sean σ, G, X e Y son como en el Lema 1.9 y Z un subconjunto de Y. Luego $\sigma|_Z = \sigma|_Y|_Z$.*

Demostración. Llamemos τ a $\sigma|_Z$ y υ a $\sigma|_Y|_Z$. Para diferenciar los dominios de τ y υ definamos $Z_t^\tau := \sigma_t(X_{t^{-1}} \cap Z) \cap Z$ y $Z_t^\upsilon = (\sigma|_Y)_t(Y_{t^{-1}} \cap Z) \cap Z$. Veamos que $Z_t^\tau = Z_t^\upsilon$.

Tomemos $x \in Z_t^\tau$. Como $Y \subset Z$, $x \in Z_t^\tau = Z \cap \sigma_t(X_{t^{-1}} \cap Z) \subset Y_t$. Luego $(\sigma|_Y)_{t^{-1}}(x) = \sigma_{t^{-1}}(x) \in Z_{t^{-1}}^\tau \subset Z \cap Y_{t^{-1}}$ y por lo tanto $x \in (\sigma|_Y)_t(Z \cap Y_{t^{-1}}) \cap Z = Z_t^\upsilon$. Recíprocamente tomemos $x \in Z_t^\upsilon$. Luego $x \in Y_t$ y $\sigma_{t^{-1}}(x) = (\sigma|_Y)_{t^{-1}}(x) \in Z \cap Y_{t^{-1}} \subset Z \cap X_{t^{-1}}$. Eso implica que $x \in \sigma_t(Z \cap X_{t^{-1}}) \cap Z = Z_t^\tau$.

Ya que hemos mostrado que τ y υ tienen el mismo dominio tomemos $t \in G$ y $x \in Z_{t^{-1}}^\tau$. Luego $\tau_t(x) = \sigma_t(x) = (\sigma|_Y)_t(x) = \upsilon_t(x)$. □

En el Capítulo 5 daremos una generalización de ciertos Teoremas de Imprimitividad que, en el caso de acciones globales, requieren acciones libres que conmutan. Ambos conceptos son conocidos para acciones parciales.

El tipo de acciones parciales libres que consideraremos son libres en el sentido más restrictivo: son topológicamente libres [ELQ02, Definición 2.1] con la topología discreta. La siguiente es la Definición 4.59 de [Aba99].

Definición 1.12. Sea $\sigma = (\{\sigma_t\}_{t\in G}, \{X_t\}_{t\in G})$ una acción parcial topológica. El *estabilizador* de $x \in X$ es $G_x := \{t \in G \colon x \in X_{t^{-1}},\ \sigma_t(x) = x\}$ y σ es *libre* si para todo $x \in X$ se cumple que $G_x = \{e\}$. Sólo en caso que sea necesario hacer referencia a σ escribiremos G_x^σ en lugar de G_x.

Las acciones de los Ejemplos 1.3 y 1.4 son libres.

Observación 1.13. Cada estabilizador es un subgrupo y si $x \in X_{t^{-1}}$ entonces $G_{\sigma_t(x)} = tG_xt^{-1}$. Por otro lado, si $f\colon \sigma \to \tau$ es un morfismo de acciones parciales (en conjuntos) de G en X e Y entonces $G_x \subset G_{f(x)}$. En particular, si $Z \subset X$ y $f\colon \sigma|_Z \to \sigma$ es la inclusión canónica entonces $\sigma|_Z$ es libre siempre que σ lo es.

En cuanto a las acciones que conmutan adoptaremos una definición equivalente a la Definición 4.34 de [Aba99]. La equivalencia se obtiene usando que un conjunto $U \subset X$ es $\sigma-$invariante si y solamente si $\sigma_s(X_{s^{-1}} \cap U) = X_s \cap U$, para todo $s \in G$.

Definición 1.14. Sean $\sigma = \left(\{\sigma_t\}_{t\in H}, \{X_t^H\}_{t\in H}\right)$ y $\tau = \left(\{\tau_t\}_{t\in K}, \{X_t^K\}_{t\in K}\right)$ acciones parciales de H y K en X. Diremos que σ y τ conmutan si

(1) Para todo $(s,t) \in H \times K$, X_s^H es $\tau-$invariante y X_t^K es $\sigma-$invariante.

(2) Para todo $(s,t) \in H \times K$ y $x \in X_{s^{-1}}^H \cap X_{t^{-1}}^K$, $\tau_t(\sigma_s(x)) = \sigma_s(\tau_t(x))$.

Las acciones parciales de los Ejemplos 1.3 y 1.4 conmutan. Afortunadamente sólo cuando $|n| < 1$ la intersección $X_n^{\mathbb{Z}} \cap X_m^{\mathbb{Z}_2}$ es no vacía, con lo cual es fácil verificar que cada $X_n^{\mathbb{Z}}$ es $\tau-$invariante y cada $X_m^{\mathbb{Z}_2}$ es $\sigma-$invariante. Cuando $n = 0$ o $m = 0$ es inmediato que $\sigma_m(\tau_n(x)) = \tau_n(\sigma_m(x))$. En otro caso $\sigma_m(\tau_n(x)) = \tau_n(\sigma_m(x)) = 6 - x$.

A partir de acciones parciales que conmutan es posible definir una acción parcial del producto de los grupos, tal como para las acciones globales.

Lema 1.15. *Sean* $\sigma = \Big(\{\sigma_t\}_{t\in H}, \{X_t^H\}_{t\in H}\Big)$ *y* $\tau = \Big(\{\tau_t\}_{t\in K}, \{X_t^K\}_{t\in K}\Big)$ *acciones parciales que conmutan. Definamos, para cada* $(s,t) \in H \times K$*,* $X_{(s,t)} := X_s^H \cap X_t^K$ *y* $\upsilon_{(s,t)}\colon X_{(s,t)^{-1}} \to X_{(s,t)}$ *como* $\upsilon_{(s,t)}(x) = \tau_s(\sigma_t(x))$*. Luego* $\upsilon := (\{\upsilon_t\}_{t\in H\times K}, \{X_t\}_{t\in H\times K})$ *es una acción parcial en conjuntos de* $H \times K$ *en* X*.*

En caso que σ *y* τ *sean acciones parciales continuas (topológicas, HLC)* υ *también es una acción parcial continua (topológica, HLC).*

Demostración. Es inmediato que υ verifica las condiciones (1) y (2) de la Definición 1.1. En cuanto a (3) tomemos $(r,s),(p,q) \in H \times K$ y $x \in X_{(s,t)^{-1}} \cap X_{(s,t)^{-1}(p,q)^{-1}}$; es decir $x \in X_{s^{-1}}^H \cap X_{s^{-1}p^{-1}}^H \cap X_{t^{-1}}^K \cap X_{t^{-1}q^{-1}}^K$. Luego las definiciones de acción parcial y acciones parciales que conmutan implican que

$$\upsilon_{(s,t)}(x) = \tau_t(\sigma_s(x)) \in \tau_t\left(X_s^H \cap X_{p^{-1}}^H \cap X_{t^{-1}}^K \cap X_{t^{-1}q^{-1}}^K\right) = X_s^H \cap X_{p^{-1}}^H \cap X_t^K \cap X_{q^{-1}}^K.$$

En particular $\upsilon_{(s,t)}(x) \in X_{p^{-1}}^H \cap X_{q^{-1}}^K = X_{(p,q)^{-1}}$.

Ahora tan sólo nos resta mostrar que $\upsilon_{(p,q)}(\upsilon_{(s,t)}(x)) = \upsilon_{(ps,tq)}(x)$. Observemos que $\upsilon_{(p,q)}(\upsilon_{(s,t)}(x)) = \tau_q(\sigma_p(\tau_t(\sigma_s(x))))$. De los cálculos de arriba deducimos que $\sigma_s(x) \in X_{p^{-1}}^H \cap X_{t^{-1}}^K$ y por lo tanto $\sigma_p(\tau_t(\sigma_s(x))) = \tau_t(\sigma_p(\sigma_s(x)))$. Entonces, como σ y τ son acciones parciales: $\upsilon_{(p,q)}(\upsilon_{(s,t)}(x)) = \tau_q(\tau_t(\sigma_p(\sigma_s(x)))) = \tau_{qt}(\sigma_{ps}(x)) = \upsilon_{(ps,qt)}(x)$.

Supongamos que σ y τ son continuas y definamos $\pi\colon H \times K \times X \to H \times X$ como $\pi(s,t,x) = (s,x)$ y $\rho\colon H \times K \times X \to H \times X$ como $\rho(s,t,x) = (t,x)$. Es inmediato que $\Gamma_\upsilon = \pi^{-1}(\Gamma_\sigma) \cap \rho^{-1}(\Gamma_\tau)$. Puesto que π y ρ son continuas es evidente que Γ_υ es abierto si Γ_τ y Γ_σ lo son. Además $H \times K \times X$ es HLC si H, K y X son HLC. Por lo tanto todo lo que nos resta es ver que υ es continua.

La función $\nu\colon \pi^{-1}(\Gamma_\sigma) \to K \times X$, $\nu(s,t,x) = (s, \sigma_t(x))$, es continua pues sus coordenadas lo son. Además $\nu^{-1}(\Gamma_\tau) = \Gamma_\upsilon$, por lo tanto $\mathrm{ev}_\tau \circ \nu\colon \Gamma_\upsilon \to X$ es continua. Luego υ es continua porque $\mathrm{ev}_\tau \circ \nu = \mathrm{ev}_\upsilon$. □

Definición 1.16. Sean σ y τ acciones parciales como en el enunciado de arriba. La *acción parcial producto* de σ y τ es la acción parcial υ antes construida, la cual será denotada $\sigma\tau$.

1.1.1. Globalizaciones

En lo que sigue trabajaremos sólo con acciones parciales topológicas o HLC.

Definición 1.17 ([Aba03])**.** Sea σ una acción parcial topológica de G en X. Una *globalización* de σ es una 4-upla (τ, ι, Z, Y) donde τ es una acción global topológica de G en Z, Y es un abierto de Z y $\iota\colon \sigma \to \tau|_Y$ es un isomorfismo de acciones parciales topológicas. Diremos que (τ, ι, Z, Y) es *minimal* si $\tau Y = Z$.

La definición expresa el hecho de que σ es isomorfa a una acción parcial obtenida de restringir una acción global. A partir de cualquier globalización (τ, ι, Z, Y) podemos construir una globalización minimal, basta con tomar $(\tau|_{\tau Y}, \iota, \tau Y, Y)$.

Teorema 1.18 (Abadie [Aba03])**.** *Toda acción parcial topológica σ de G en X tiene una globalización topológica y minimal (τ, ι, Z, Y) con la siguiente propiedad universal: para toda acción global topológica υ de G y todo morfismo $f\colon \sigma \to \upsilon$ existe un único morfismo $\widetilde{f}\colon \tau \to \upsilon$ de manera que $\widetilde{f} \circ \iota = f$.*

Vale la pena observar que si X tiene la topología discreta entonces Z también. Por lo que si σ es una acción parcial en conjuntos entonces τ es una acción global en conjuntos equipada con la topología discreta.

Corolario 1.19. *Si (τ, ι, Z, Y) y (τ', ι', Z', Y') son globalizaciones con la propiedad universal del Teorema anterior entonces τ es isomorfa a τ'. Es más, existe un único isomorfismo de acciones parciales topológicas $f\colon \tau \to \tau'$ de manera que $f \circ \iota = \iota'$.*

Dada la unicidad (a menos de isomorfismos) llamaremos *espacio envolvente* de σ al conjunto Z y *acción envolvente* de σ a la acción global τ del Teorema 1.18. Con frecuencia la envolvente de σ será denotada σ^e y el espacio envolvente X^e.

Observación 1.20*.* De la Observación 1.13 se deduce que σ es libre sii σ^e es libre.

El siguiente resultado parece estar implícito en [Aba03].

Teorema 1.21. *Toda globalización minimal de una acción parcial topológica tiene la propiedad universal del Teorema 1.18.*

Demostración. Sean σ una acción parcial topológica de G en X y (τ, ι, Z, Y) una globalización minimal de σ. Por otro lado tomemos una acción global topológica, υ de G en W, y un morfismo $f\colon \sigma \to \upsilon$. El morfismo $\widetilde{f}\colon \tau \to \upsilon$ tal que $\widetilde{f} \circ \iota = f$ debe cumplir $\widetilde{f}(\tau_s(\iota(x))) = \upsilon_t(f(x))$ $(\forall\ t \in G, x \in X)$ lo que determina $\widetilde{f}$ en $\tau Y = Z$. Luego $\widetilde{f}$, de existir, es único y lo anterior nos dice cómo definirlo.

Supongamos que $x, y \in X$, $s, t \in G$ y que $\tau_s(\iota(x)) = \tau_t(\iota(y))$. Luego $\tau_{s^{-1}t}(\iota(y)) = \iota(x) \in Y \cap \tau_{s^{-1}t}(Y)$. Como $\iota\colon \sigma \to \tau|_Y$ es un isomorfismo se tiene $x \in X_{s^{-1}t}$ y

$$\sigma_{t^{-1}s}(x) = \iota^{-1}(\iota(\sigma_{t^{-1}s}(x))) = \iota^{-1}(\tau_{t^{-1}s}(\iota(x))) = \iota^{-1} \circ \iota(y) = y.$$

Entonces $\upsilon_s(f(x)) = \upsilon_t(\upsilon_{t^{-1}s}(f(x))) = \upsilon_t(f(\sigma_{t^{-1}s}(x))) = \upsilon_t(f(y))$. De esto deducimos que existe una única función $\widetilde{f}\colon Z \to W$ tal que $\widetilde{f}(\tau_t(\iota(x))) = \upsilon_t(f(x))$ $(\forall\, t \in G, x \in X)$.

Para mostrar que $\widetilde{f}$ es continua observemos que para todo $t \in G$ se tiene $\widetilde{f}|_{\tau_t(Y)} = f \circ \iota^{-1} \circ \tau_{t^{-1}}$, por lo que $\widetilde{f}$ es continua en $\tau_t(Y)$. Como $Z = \tau Y$ tenemos que $\widetilde{f}$ es continua en Z.

Ahora tan sólo nos resta mostrar que $\widetilde{f}$ es un morfismo de acciones globales en conjuntos. Dados $z \in Z$ y $s \in G$ tomemos $x \in X$ y $t \in G$ tales que $z = \tau_t(\iota(x))$ para deducir que

$$\widetilde{f}(\tau_s(z)) = \widetilde{f}(\tau_{st}(\iota(x))) = \upsilon_{st}(f(x)) = \upsilon_s(\upsilon_t(f(x))) = \upsilon_s(\widetilde{f}(z)).$$

□

Toda acción parcial HLC tiene una acción envolvente, que puede o no ser HLC. El Corolario anterior nos dice que ese hecho depende únicamente de la acción parcial.

Teorema 1.22 (Abadie)**.** *Sea σ es acción parcial HLC de G en X. Luego una (y por lo tanto todas) sus acciones envolventes serán HLC si y solamente si el gráfico de σ es cerrado en $G \times X \times X$.*

Ejemplo 1.5. Tomemos las acciones σ y τ de los Ejemplos 1.3 y 1.4. Ellas tienen gráfico cerrado porque sus envolventes son HLC. Como esas acciones parciales conmutan podemos construir la acción $\sigma\tau$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Dado que $X_{(-1,1)} = (0, 1] \cup [2, 3)$ y $\sigma\tau_{(-1,1)}(x) = 6 - x$; la sucesión $\{((-1, 1), 3 - 1/n, 3 + 1/n)\}_n$ está contenida en $\mathrm{Gr}(\sigma\tau)$ pero su límite no pertenece a $\mathrm{Gr}(\sigma\tau)$. Vemos entonces que el producto de dos acciones puede no tener una globalización (HLC) aún cuando cada una de las acciones la tiene.

Además de la restricción a un subconjunto podemos restringir a un subgrupo. Supongamos que $\sigma = (\{\sigma_t\}_{t\in G}, \{X_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial topológica y que H es un subgrupo de G, considerado con la topología relativa. La restricción a H de σ, $\sigma|_H$, es la acción $(\{\sigma_t\}_{t\in H}, \{X_t\}_{t\in H})$, que también es una acción parcial topológica. Notemos que si Y es un subconjunto (abierto) de X entonces $\sigma|_H|_Y = \sigma|_Y|_H$.

1.2. Familias continuas

En las siguientes secciones trabajaremos con acciones parciales en C*-álgebras y en módulos de Hilbert. Para definir tales objetos utilizaremos la noción de familia continua de subespacios. Algunos resultados de esta sección aparecen sin demostración pues sus pruebas se encuentran en [Exe97].

Definición 1.23. Dados espacios topológicos X e Y y una familia $F = \{F_x\}_{x\in X}$ de subconjuntos de Y, diremos que F es una *familia continua* si para cada abierto $U \subset Y$ el conjunto $U_F := \{x \in X : U \cap F_x \neq \emptyset\}$ es abierto en X.

Lema 1.24. *Supongamos que $F = \{F_x\}_{x\in X}$ es una familia de subconjuntos de Y, definamos $\mathcal{B}_F := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F_x\}$ y sea $\pi\colon \mathcal{B}_F \to X$ la proyección en la primer coordenada. Luego F es continua si y solamente si π es abierta.*

Definición 1.25. Dada una familia continua F de manera que F_x es no vacío para todo x, el *fibrado* asociado a F es $\mathcal{B}_F$.

Una $F-$sección es una función $f\colon X \to Y$ de manera que $f(x) \in F_x$, para todo $x \in X$. Diremos que una sección f pasa por $y \in F_x$ si $f(x) = y$ y que F tiene suficientes secciones continuas si por cada $y \in F_x$ pasa una sección continua.

Toda sección (continua o no) del fibrado $\mathcal{B}_F$ es de la forma $g\colon X \to \mathcal{B}_F,\ g(x) = (x, f(x))$, para alguna $F-$sección f. Es más, g es continua si y solamente si f lo es.

Los *fibrados de Banach* (*Banach bundle* en [FD88, II 13.4]) están estrechamente relacionados a las familias continuas de subespacios de un espacio de Banach.

Lema 1.26. *Sean X un espacio HLC, Y un espacio de Banach y $F = \{F_x\}_{x\in X}$ una familia de subespacios cerrados de Y. Luego el fibrado $\mathcal{B}_F$ es un subfibrado de Banach del fibrado trivial $X \times Y \to X$.*

Corolario 1.27. *Dados un espacio HLC X, un espacio de Banach Y y una familia de subespacios cerrados de Y, $F = \{F_x\}_{x\in Y}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) *F es continua.*

(2) *Existe un conjunto S formado por $F-$secciones continuas de manera que para cada $x \in X,\ S(x) := \{f(x) : f \in S\}$ es denso en F_x.*

(3) *Existe un conjunto S formado por $F-$secciones continuas de manera que para cada $x \in X,\ S(x) = F_x$.*

1.3. C*-álgebras

Llamaremos $*-$homomorfismo a cualquier función entre $*-$álgebras que preserve la estructura de $*-$álgebra (suma, producto por escalares, producto e involución). Todo $*-$homomorfismo entre C*-álgebras es contractivo y será una isometría sii es inyectivo.

A continuación describimos algo de la notación sobre módulos y álgebras. Si M es un módulo (a derecha) sobre el álgebra A, $U \subset A$ y $V \subset M$, denotamos UV al conjunto $\{uv \colon u \in U,\ v \in V\}$. El espacio generado por V será denotado $\operatorname{span} V$.

Un subconjunto I de un álgebra A es un ideal algebraico (bilateral) si es un subespacio y $AI \cup IA \subset A$. El subconjunto I de la C*-álgebra A es un ideal (bilateral) si es un ideal algebraico (bilateral) y es cerrado con la topología de la norma de A. En ese caso $I = I^*$ e I es una C*-álgebra con la estructura heredada de A (una C*-subálgebra).

El Teorema de Cohen-Hewitt implica que si I y J son ideales de una C*-álgebra A entonces $I \cap J = IJ$. Por otra parte, si J' es un ideal de J (como C*-álgebra) entonces la existencia de unidades aproximadas en J implica que J' es un ideal de A.

Definición 1.28 ([Exe94c, McC95, Exe97])**.** Diremos que α es una *acción parcial en C*-álgebras* de G en A si: G es un grupo HLC, A es una C*-álgebra, $\alpha = (\{\alpha_t\}_{t\in G}, \{A_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial continua de G en A, $\{A_t\}_{t\in G}$ es una familia continua de ideales (bilaterales y cerrados) y cada α_t es un $*-$homomorfismo.

Definición 1.29 ([Aba03])**.** Sean α y β acciones parciales en C*-álgebras de G en A y en B; $\pi \colon \alpha \to \beta$ es un *morfismo de acciones parciales en C*-álgebras* si es un morfismo de acciones parciales en conjuntos y también un $*-$homomorfismo. El morfismo identidad de α es id_A y la composición de morfismos es la composición de funciones.

Definición 1.30. El fibrado asociado a la acción parcial en C*-álgebras α de G en A es el fibrado asociado a $\{A_t\}_{t\in G}$, el cual será denotado $\mathcal{B}\alpha$.

Siguiendo la notación de Exel para los elementos de $\mathcal{B}\alpha$, escribiremos $a\delta_t$ en lugar de (t,a) cuando $(t,a) \in \mathcal{B}\alpha$.

Observación 1.31. El fibrado asociado a α y el dominio de α son subfibrados de Banach del fibrado trivial $G \times A$. La función $\Gamma_\alpha \to \mathcal{B}\alpha,\ (t,a) \mapsto (t, \alpha_t(a))$, es un isomorfismo isométrico de fibrados de Banach.

Notación 1.32. Dado un conjunto o un espacio topológico X, escribiremos X^{dis} cuando consideremos a X como espacio topológico con la topología.

Teorema 1.33. *Sean G un grupo topológico HLC, A una C*-álgebra y α una acción parcial en C*-álgebras de G^{dis} en A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) α *es una acción parcial en C*-álgebras de* G *en* A.

(2) α *es una acción parcial continua de* G *en* A *y existe un conjunto* $S \subset C(G, A)$ *de* $\{A_t\}_{t\in G}-$*secciones tales que, para cada* $t \in G$, $S(t)$ *genera una* $*-$*subálgebra densa en* A_t.

(3) Existe un conjunto $S \subset C(G, A)$ *de* $\{A_t\}_{t\in G}-$*secciones de manera que (i) para cada* $t \in G$, $S(t)$ *genera una* $*-$*subálgebra densa de* A_t *y (ii) para toda* $f \in S$ *la función* $G \to A,\ t \mapsto \alpha_t(f(t^{-1}))$, *es continua.*

Demostración. En las afirmaciones (2) y (3) puede asumirse que S es una $*-$subálgebra de $C(G, A)$ (basta considerar la $*-$subálgebra generada por S en $C(G, A)$). Por lo tanto podemos asumir que cada $S(t)$ es un subespacio denso de A_t.

El Corolario 1.27 implica que (1) y (2) son equivalentes. Por otra parte es inmediato que (2) implica (3). Veamos que (3) implica (2). El Corolario antes mencionado implica que basta con mostrar que $\mathrm{ev}_\alpha\colon \Gamma_\alpha \to A$ es continua. Si $\mathcal{B}\alpha$ es el fibrado asociado a $\{A_t\}_{t\in G}$ y equipamos a Γ_α y a $\mathcal{B}\alpha$ con la estructura de Fibrado de Banach heredada del fibrado trivial $G \times A$; basta mostrar que el mapa de fibrados $F\colon \Gamma_\alpha \to \mathcal{B}\alpha,\ (t, a) \mapsto (t, \alpha_t(a))$, es continuo, para lo cual recurrimos a [FD88, II Proposición 13.6]. Es claro que (para todo $t \in G$) la imagen por F de la fibra sobre t de Γ_α es la fibra sobre t de $\mathcal{B}\alpha$. Además F es una isometría, por lo tanto las hipótesis (i) y (ii) de la Proposición se satisfacen para F. Sea S' la familia de secciones de Γ_α de la forma $t \mapsto (t, f(t^{-1}))$, para alguna $f \in S$. Esta familia de secciones cumple la condición (iii) de la Proposición, luego F es continua. □

Corolario 1.34. *Si* α *es una acción parcial en C*-álgebras de* G *en* A *e* I *es un ideal de* A, *entonces la restricción de* α *a* I *es una acción parcial en C*-álgebras de* G *en* I.

Demostración. Llamemos β a la restricción $\alpha|_I$. El Lema 1.9 implica que β es una acción parcial continua de G en A. Además, para cada $t \in G$, $I_t = I \cap \alpha_t(I \cap A_{t^{-1}})$ es un ideal de I porque tanto I como $\alpha_t(I \cap A_{t^{-1}})$ son ideales de A. Por otro lado cada β_t es un $*-$homomorfismo por ser la restricción de α_t a I_t, luego β es una acción parcial en C*-álgebras de G^{dis} en A y también una acción parcial continua de G en A. Habremos terminado la prueba si logramos construir una familia de $\{I_t\}_{t\in G}-$secciones como en la condición (2) del Teorema anterior.

Dados $a, b \in I$ y una $\{A_t\}_{t\in G}-$sección continua f definamos $[a, b, f]\colon G \to I$ como $[a, b, f](t) = a\alpha_t(bf(t^{-1}))$. Luego $[a, b, f]$ es una $\{I_t\}_{t\in G}-$sección continua. Sea S la familia de secciones de la forma $[a, b, f]$. El Teorema de Cohen-Hewitt implica que $S(t) = I_t$, para todo $t \in G$. □

1.3.1. C*-álgebras conmutativas

El Teorema de Representación de Gelfand-Naimark establece que toda C*-álgebra conmutativa A es isomorfa al álgebra de funciones continuas que se anulan en infinito de un espacio HLC, es decir que $A = C_0(X)$ para algún espacio HLC X.

Para cada ideal $I \subset A$ existe un único abierto $U \subset X$ de manera que I es el subconjunto de las funciones de $C_0(X)$ que se anulan fuera de U; $I = C_0(U)$. La correspondencia $U \leftrightsquigarrow C_0(U)$ es un isomorfismo de látices entre los abiertos de X y los ideales de A (ordenados con la inclusión).

Supongamos que $\sigma = (\{\sigma_t\}_{t\in G}, \{X_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial HLC de G en X. Luego (para cada $t \in G$) $\theta_t\colon C_0(X_{t^{-1}}) \to C_0(X_t)$, $\theta_t(f) = f \circ \sigma_{t^{-1}}$, es un isomorfismo de C*-álgebras. Puede mostrarse [Aba99, Aba04] que $\Theta(\sigma) := (\{\theta_t\}_{t\in G}, \{C_0(X_t)\}_{t\in G})$ es una acción parcial en C*-álgebra y que toda acción parcial en una C*-álgebra conmutativa se obtiene por este procedimiento.

Sea τ otra acción parcial HLC, de G en Y, y $f\colon \sigma \to \tau$ un isomorfismo. Esta función define un isomorfismo $\Theta(f)\colon \Theta(\alpha) \to \Theta(\beta)$ donde $\Theta(f)(a) = a \circ f$, para toda $a \in C_0(X_{t^{-1}})$ y todo $t \in G$. Todo isomorfismo de acciones parciales en C*-álgebras conmutativas se obtiene de esta manera.

Más adelante utilizaremos extensivamente la correspondencia $\sigma \leftrightsquigarrow \Theta(\sigma)$.

1.4. Módulos de Hilbert

La teoría de acciones parciales en módulos de Hilbert que desarrollaremos bien podría ser desarrollada en C*-anillos ternarios (*ternary C*-rings*, [Zet83, Definición 0.1]). Hemos optado por trabajar con módulos de Hilbert ya que éstos aparecen más frecuentemente que aquellos en la literatura. Las definiciones que exponemos son casos particulares de las expuestas en la Sección 4 de [Aba03].

Como parte de la introducción de nuestra notación recordamos algunos hechos que utilizaremos frecuentemente. La referencia principal es [RW98]. Si $\mathcal{X}$ es un $A-$módulo de Hilbert (a derecha a no ser que se indique lo contrario) el producto interno de $\mathcal{X}$ con valores en la C*-álgebra A será denotado $\langle\ |\ \rangle$, $\langle\ |\ \rangle_A$ o $\langle\ |\ \rangle_r$ (el subíndice r hace referencia al lado derecho, *right* en inglés). La norma en X es $\|x\| := \|\langle x|x\rangle\|^{1/2}$.

Dados conjuntos $U, V \subset \mathcal{X}$ y $W \subset A$ definimos $\langle U|V\rangle := \{\langle x|y\rangle\colon (x,y) \in U \times V\}$, $UW := \{xa\colon (x,a) \in U \times W\}$ y A_U es el ideal (cerrado) generado por $\langle U|U\rangle$. Si U

es un submódulo (algebraico) entonces $\operatorname{span}\langle U|U\rangle$ es un $*-$ideal algebraico de A y $A_U = \overline{\operatorname{span}}\,\langle U|U\rangle$.

Para cada unidad aproximada de A_U, $\{e_i\}_i$, y cada $x \in U$ se cumple que $xe_i \to x$. Luego $U \subset \overline{\operatorname{span}}\,(U\langle U|U\rangle)$. El Teorema de Cohen-Hewitt implica que si U es un submódulo cerrado de $\mathcal{X}$ e I un ideal de A entonces UI es un submódulo cerrado de $\mathcal{X}$ y que $U = UA_U = UA$.

Un ideal de $\mathcal{X}$ es un subconjunto U de $\mathcal{X}$ para el cual existe un ideal I de A tal que $U = \mathcal{X}I$. Equivalentemente, si U es un submódulo cerrado que cumple alguna de las siguientes condiciones: $\mathcal{X}\langle U|U\rangle \subset U$, $\mathcal{X}\langle U|\mathcal{X}\rangle \subset U$, $\mathcal{X}\langle \mathcal{X}|U\rangle \subset U$ o $U = \mathcal{X}A_U$.

Toda C*-álgebra B es un módulo de Hilbert sobre sí misma con el producto interno $\langle a|b\rangle := a^*b$. Los ideales de B en tanto módulo de Hilbert son los mismos que sus ideales en tanto C*-álgebra.

Diremos que $\mathcal{X}$ es pleno (a derecha) si $A = A_{\mathcal{X}}$. Cuando digamos que $\mathcal{X}_A$ es un módulo de Hilbert estaremos diciendo que $\mathcal{X}$ es un $A-$módulo de Hilbert pleno.

Una función $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre $A-$módulos de Hilbert es adjuntable si existe una función $T^*\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que para todo $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ se cumple que $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$. Toda función adjuntable es lineal y acotada. El conjunto de los operadores adjuntables de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ será denotado $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. La norma de $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es la norma de operadores.

Dado $x \in \mathcal{X}$ definimos $|x\rangle\colon A \to \mathcal{X}$ y $\langle x|\colon \mathcal{X} \to A$ como $|x\rangle(a) := xa$ y $\langle x|(y) := \langle x|y\rangle$. Escribiremos $|x\rangle\langle y|$ en lugar de $|x\rangle \circ \langle y|$. Se cumple que $\langle x| \circ |y\rangle(a) = \langle x|y\rangle(a)$ $(x, y \in \mathcal{X})$, es decir que $\langle x| \circ |y\rangle$ es el operador de multiplicación por $\langle x|y\rangle$ y podemos escribir $\langle x| \circ |y\rangle = \langle x|y\rangle$.

El conjunto de los operadores compactos generalizados de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, $\mathbb{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, es la clausura del espacio generado por $|\mathcal{Y}\rangle\langle\mathcal{X}| := \{|y\rangle\langle x|\colon x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}\}$ en $\mathbb{B}(\mathcal{X})$. Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ escribiremos $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ y $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ en lugar de $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\mathbb{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

El producto interno a izquierda canónico de $\mathcal{X}$ es $\langle x|y\rangle^l := |x\rangle\langle y|$. Con este producto interno y la acción canónica de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{X}$, $Tx := T(x)$, $\mathcal{X}$ es un $\mathbb{K}(\mathcal{X}) - A_{\mathcal{X}}-$bimódulo de equivalencia de Morita.

La estructura de espacio vectorial del *módulo conjugado* de $\mathcal{X}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$, es la del espacio conjugado de $\mathcal{X}$. Es decir que como conjuntos $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}$. Para cada $x \in \mathcal{X}$ escribiremos $\widetilde{x}$, o $x^{\sim}$, cuando pensemos a x como elemento de $\widetilde{\mathcal{X}}$. Lo mismo vale para los conjuntos, si $U \subset \mathcal{X}$ entonces $\widetilde{U}$ es U como subconjunto de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

La estructura de $\widetilde{\mathcal{X}}$ como $\mathbb{K}(\mathcal{X})-$módulo de Hilbert es $\widetilde{x}T := (T^*x)^{\sim}$ y $\langle\widetilde{x}|\widetilde{y}\rangle_{\mathbb{K}(\mathcal{X})} := |x\rangle\langle y|$. Esta construcción implica que $\widetilde{\mathcal{X}}$ es pleno a derecha. Además existe un único isomorfismo de C*-álgebras $\pi\colon A_{\mathcal{X}} \to \mathbb{K}(\widetilde{\mathcal{X}})$ tal que $\pi(\langle x|y\rangle_A) = |\widetilde{x}\rangle\langle\widetilde{y}|$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$. Usando este isomorfismo podemos pensar $\widetilde{\widetilde{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$.

En tanto espacios topológicos $\mathcal{X}$ y $\widetilde{\mathcal{X}}$ son el mismo ya que la función $x \mapsto \widetilde{x}$ es una isometría. Por otro lado, para cada conjunto $U \subset \mathcal{X}$ se cumple que U es un ideal de $\mathcal{X}$ si y solamente si $\widetilde{U}$ es un ideal de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Dado un subconjunto U de $\mathcal{X}$ denotaremos $\mathbb{K}(\mathcal{X})_U$ al ideal de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ generado por $\langle U|U\rangle_{\mathbb{K}(\mathcal{X})} =: |U\rangle\langle U|$. En los resultados que siguen está implícito el hecho de que para cada submódulo inducido por ideales $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ existe un único isomorfismo de C*-álgebras $\pi\colon \mathbb{K}(\mathcal{Y}) \to \mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathcal{Y}}$ de manera que $\pi(\langle x|y\rangle_{\mathbb{K}(\mathcal{Y})}) = \langle x|y\rangle_{\mathbb{K}(\mathcal{X})}$, para todo $x, y \in \mathcal{Y}$. Por este motivo podemos pensar a $\mathbb{K}(\mathcal{Y})$ como un ideal de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$.

Lema 1.35. *Supongamos que $\mathcal{X}$ es un $A-$módulo de Hilbert y que Z es un espacio topológico HLC. Para cada familia de ideales de $\mathcal{X}$, $\{\mathcal{X}_z\}_{z\in Z}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) $\{\mathcal{X}_z\}_{z\in Z}$ es una familia continua.

(2) $\{A_{\mathcal{X}_z}\}_{z\in Z}$ es una familia continua.

(3) $\{\mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathcal{X}_z}\}_{z\in Z}$ es una familia continua.

Demostración. Para simplificar la notación escribamos A_z en lugar de $A_{\mathcal{X}_z}$. El Lema 4.1 de [Aba03] nos dice que (2) implica (1). Recíprocamente, dadas $\{\mathcal{X}_z\}_{z\in Z}-$secciones continuas, f y g, definamos $\langle f|g\rangle\colon Z \to A$ como $\langle f|g\rangle(z) := \langle f(z)|g(z)\rangle$. Es claro que $\langle f|g\rangle$ es una $\{A_z\}_{z\in Z}-$sección continua. Llamemos S al conjunto formado por todas las secciones de la forma $\langle f|g\rangle$, de forma que para $z \in Z$ se cumple que $\overline{\operatorname{span}}\, S(z) = \overline{\operatorname{span}}\, \langle \mathcal{X}_z|\mathcal{X}_z\rangle = A_z$. En esta situación el Corolario 1.27 implica que $\{A_z\}_{z\in Z}$ es una familia continua. La equivalencia entre (1) y (3) se deduce de la anterior usando $\widetilde{\mathcal{X}}$. $\square$

1.4.1. Morfismos de módulos de Hilbert y acciones parciales

La definición de acciones parciales en módulos de Hilbert será un caso particular de la definición de acción parcial en C*-anillos ternarios [Aba03, Definición 4.3]; en ella juegan un papel fundamental los homomorfismos de C*-anillos ternarios, que en nuestro caso llamaremos homomorfismos de módulos de Hilbert.

Definición 1.36. Diremos que $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un *homomorfismo de módulos de Hilbert* si $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son módulos de Hilbert (no sobre la misma álgebra, necesariamente) y ϕ es una función lineal tal que para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ cumple que $\phi(x\langle y|z\rangle) = \phi(x)\langle\phi(y)|\phi(z)\rangle$.

En nuestro caso la Proposición 4.1 de [Aba03] implica lo siguiente:

Proposición 1.37. *Sea $\phi\colon \mathcal{X}_A \to \mathcal{Y}_B$ un homomorfismo de módulos de Hilbert. Luego existe un único $*-$homomorfismo $\phi^r\colon A \to B$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}$ cumple que $\phi^r(\langle x|y\rangle) = \langle \phi(x)|\phi(y)\rangle$; lo que implica que ϕ es contractivo. Además ϕ es inyectivo (un isomorfismo) sii ϕ^r es inyectivo (un isomorfismo).*

Corolario 1.38. *Sea $\phi\colon \mathcal{X}_A \to \mathcal{Y}_B$ un homomorfismo de módulos de Hilbert. Luego existe un único $*-$homomorfismo $\phi^l\colon \mathbb{K}(\mathcal{X}) \to \mathbb{K}(\mathcal{Y})$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}$ cumple que $\phi^r(|x\rangle\langle y|) = |\phi(x)\rangle\langle\phi(y)|$. Además ϕ es inyectivo (un isomorfismo) sii ϕ^l es inyectivo (un isomorfismo).*

Observación 1.39. La linealidad y continuidad de ϕ, ϕ^r y ϕ^l implican que para todo $x \in \mathcal{X}$, $a \in A_\mathcal{X}$ y $T \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$ se cumple que $\phi(x)\phi^r(a) = \phi(xa)$ y que $\phi(Tx) = \phi^l(T)\phi(x)$.

Corolario 1.40. *Si $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $\psi\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ son homomorfismos de módulos de Hilbert entonces $\psi \circ \phi$ también lo es y $(\psi \circ \phi)^r = \psi^r \circ \phi^r$, $(\psi \circ \phi)^l = \psi^l \circ \phi^l$, $(\mathrm{id}_\mathcal{X})^r = \mathrm{id}_{A_\mathcal{X}}$ e $(\mathrm{id}_\mathcal{X})^l = \mathrm{id}_{\mathbb{K}(\mathcal{X})}$.*

En caso que ϕ sea un isomorfismo $(\phi^{-1})^r = (\phi^r)^{-1}$ y $(\phi^{-1})^l = (\phi^l)^{-1}$. En este último caso ϕ^l es la conjugación por ϕ y el isomorfismo entre $\mathbb{B}(\mathcal{X}) = M(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ y $\mathbb{B}(\mathcal{Y}) = M(\mathbb{K}(\mathcal{Y}))$ inducido por ϕ^l es, también, la conjugación por ϕ.

Ahora tenemos todos las herramientas necesarias para definir las acciones parciales en módulo de Hilbert y obtener algunos resultados inmediatos y fundamentales.

Definición 1.41 (c.f. [Aba03] Definición 4.3)**.** Diremos que γ es una *acción parcial en módulos de Hilbert* de G en $\mathcal{X}$ si G es un grupo HLC, $\mathcal{X}$ es un módulo de Hilbert, $\gamma = (\{\gamma_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{X}_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial continua de G en $\mathcal{X}$, $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}$ es una familia continua de ideales y cada γ_t es un homomorfismo de módulos de Hilbert.

Es prácticamente evidente que toda acción parcial en C*-álgebras es una acción parcial en módulos de Hilbert, pensando a la C*-álgebra como un módulo sobre sí misma.

El siguiente Teorema se deduce de la Proposición 4.3 de [Aba03] (ver también el Lema 1.35 y el Teorema 1.45). Por esta razón omitimos la prueba, pero aclararemos algunos puntos referentes a la notación.

Tomemos una acción parcial γ en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$, siendo $\mathcal{X}$ un $A-$módulo. Luego cada $\mathcal{X}_t$ es un $A-$módulo de Hilbert y $A_{\mathcal{X}_t} \subset A_\mathcal{X}$. Cada γ_t define un isomorfismo de C*-álgebras ${\gamma_t}^r\colon A_{\mathcal{X}_{t^{-1}}} \to A_{\mathcal{X}_t}$ (el dado por la Proposición 1.37).

Antes del Lema 1.35 indicamos cómo podemos pensar a cada $\mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$ como el ideal $\mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathcal{X}_t}$ de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$. Además para cada $t \in G$ tenemos un isomorfismo de C*-álgebras ${\gamma_t}^l\colon \mathbb{K}(\mathcal{X}_{t^{-1}}) \to \mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$.

Proposición 1.42. *Sea* $\gamma = (\{\gamma_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{X}_t\}_{t\in G})$ *una acción parcial en módulos de Hilbert de* G *en* $\mathcal{X}_A$. *Luego* $\gamma^r := (\{A_{\mathcal{X}_t}\}_{t\in G}, \{\gamma_t{}^r\}_{t\in G})$ *y* $\gamma^l := \Big(\{\mathbb{K}(\mathcal{X}_t)\}_{t\in G}, \{\gamma_t{}^l\}_{t\in G}\Big)$ *son acciones parciales en C*-álgebras de* G *en* A *y en* $\mathbb{K}(\mathcal{X})$. *Además para todo* $t \in G$, $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$, $a \in A_{\mathcal{X}_{t^{-1}}}$ *y* $T \in \mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathcal{X}_{t^{-1}}}$ *se tiene* $\gamma_t(Tx) = \gamma_t^l(T)\gamma_t(x)$ *y* $\gamma_t(xa) = \gamma_t(x)\gamma_t^r(a)$.

Notación 1.43. $A_t := A_{\mathcal{X}_t}$ y $\mathbb{K}(\mathcal{X})_t := \mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathcal{X}_t} = \mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$.

Definición 1.44 ([Aba03])**.** Dos acciones parciales en C*-álgebras, α y β, son *Morita equivalentes* si existe una acción parcial en módulos de Hilbert γ de manera que γ^r es isomorfa a α y γ^l a β (como acciones parciales en C*-álgebras).

En general pensaremos $\gamma^r = \alpha$ y $\gamma^l = \beta$, omitiendo toda referencia explícita al isomorfismo.

Teorema 1.45. *Sean* G *un grupo topológico HLC,* $\mathcal{X}$ *un módulo de Hilbert y* $\gamma = (\{\gamma_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{X}_t\}_{t\in G})$ *una acción parcial de módulos de Hilbert de* G^{dis} *en* $\mathcal{X}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) γ *es una acción parcial en módulos de Hilbert de* G *en* $\mathcal{X}$.

(2) γ *es una acción parcial continua de* G *en* $\mathcal{X}$ *y existe una familia* $S \subset C(G, \mathcal{X})$ *de* $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}-$*secciones tal que, para cada* $t \in G$, $S(t)$ *genera subespacio denso de* $\mathcal{X}_t$.

(3) Existe un conjunto $S \subset C(G, \mathcal{X})$ *de* $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}-$*secciones de manera que (i) para cada* $t \in G$, $S(t)$ *genera un subespacio denso de* $\mathcal{X}_t$ *y (ii) para toda* $f \in S$ *la función* $G \to A,\ t \mapsto \gamma_t(f(t^{-1}))$, *es continua.*

Demostración. En las condiciones (2) y (3) puede asumirse que S es un subespacio de $C(G, \mathcal{X})$ (considerando el espacio generado por S en $C(G, \mathcal{X})$). El resto de la demostración consiste en seguir la demostración del Teorema 1.33 cambiando α por γ, A por $\mathcal{X}$ y la expresión "C*-álgebra(s)" por "módulo(s) de Hilbert". □

El ejemplo que damos a continuación, bien conocido para acciones globales, tiene gran importancia en la segunda mitad de la tesis, donde trabajamos con acciones en módulos.

En el resto de la tesis llamaremos μ a la medida de Haar invariante a izquierda de los grupos HLC, su función modular se denotará Δ. En caso que sea necesario hacer referencia al grupo utilizaremos subíndices (μ_G y Δ_G).

Dado un espacio de Banach E y una función $f \in C(G, E)$ llamamos *soporte* de f al conjunto $\mathrm{sop}(f) := \overline{\{t \in G \colon f(t) \neq 0\}}$. El conjunto de las funciones de soporte compacto de G en E será denotado $C_c(G, E)$ y escribiremos $\int_G f(t)\, dt$ para la integral de $f \in C_c(G, E)$ con respecto a μ.

Para construir el ejemplo tomemos una acción parcial en módulos de Hilbert $\gamma = (\{\gamma_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{X}_t\}_{t\in G})$, de G en $\mathcal{X}_A$ (p.e. una acción parcial en C*-álgebras). Llamemos $C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ al conjunto de las $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}$ secciones continuas de soporte compacto. El Corolario 1.27 junto con el Lema de Uryshon implican que para cada $x \in \mathcal{X}_t$ existe $f \in C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ tal que $f(t) = x$, en particular $C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ es no nulo.

Notación 1.46. Si llamamos $\mathcal{B}$ al fibrado de Banach asociado a la familia $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}$ existe un único isomorfismo lineal isométrico $C_c^\gamma(G,\mathcal{X}) \to C_c(\mathcal{B})$, $f \mapsto f\delta$, de forma que $f\delta(t) = f(t)\delta_t$. La topología del límite inductivo en $C_c^\alpha(G,A)$ es, por definición, aquella con la cual el isomorfismo lineal anterior es un homeomorfismo si consideramos en $C_c(\mathcal{B})$ la topología del límite inductivo. El inverso del isomorfismo será denotado $g \mapsto g\delta^{-1}$, de forma que $f\delta\delta^{-1} = f$ y $g\delta^{-1}\delta = g$.

La estructura de $A-$módulo a derecha en $C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ está dada por $(fa)(t) = f(t)a$ y el producto interno se define como $\langle f, g\rangle := \int_G \langle f(t), g(t)\rangle\, dt$. El módulo $L^2_\gamma(G,\mathcal{X})$ es el $A-$módulo de Hilbert obtenido de completar $C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ con respecto a la norma $\|f\| := \|\langle f, f\rangle\|^{1/2}$. Para simplificar la notación llamaremos $\mathcal{Y}$ a $L^2_\gamma(G,\mathcal{X})$.

Definamos, para cada $t \in G$, $A_t := A_{\mathcal{X}_t}$ y $\mathcal{Y}_t := \mathcal{Y}A_t$. El Lema 1.35 implica que $\{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G}$ es una familia continua. Además, para cada $t \in G$, $L^2_\gamma(G,\mathcal{X})_t$ es la clausura de $\mathcal{Y}_t^0 := \operatorname{span} C_c^\gamma(G,\mathcal{X})A_t$.

Sea $\alpha := \gamma^r$, por lo que $\alpha_t\colon A_{t^{-1}} \to A_t$ es un $*-$homomorfismo isométrico. Definamos $\delta_t\colon \mathcal{Y}^0_{t^{-1}} \to \mathcal{Y}^0_t$ como $\delta_t(f)(r) = \gamma_t(f(t^{-1}r))$. Tenemos que δ_t es una isometría pues

$$\langle \delta_t(f), \delta_t(g)\rangle = \int_G \langle \gamma_t(f(t^{-1}r)), \gamma_t(g(t^{-1}r))\rangle\, dr = \int_G \alpha_t(\langle f(r), g(r)\rangle)\, dr = \alpha_t(\langle f, g\rangle);$$

con lo cual extendemos δ_t a una isometría de $\mathcal{Y}_{t^{-1}}$ en $\mathcal{Y}_t$.

Ejemplo 1.6. Definiendo cada $\mathcal{Y}_t = L^2_\gamma(G,\mathcal{X})_t$ y δ_t como arriba, $\delta := (\{\delta_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $L^2_\gamma(G,\mathcal{X})$.

Comencemos por verificar que cada δ_t es un homomorfismo de módulos de Hilbert. Para cada $t \in G$ y $f, g, h \in \mathcal{Y}^0_{t^{-1}}$ tenemos que $\delta_t(f)\langle \delta_t(g), \delta_t(h)\rangle(r) = \delta_t(f)(r)\alpha_t(\langle g, h\rangle) = \gamma_t(f(t^{-1}r))\alpha_t(\langle g, h\rangle) = \gamma_t(f(t^{-1}r)\langle g, h\rangle) = \gamma_t(f\langle g, h\rangle(t^{-1}r)) = \delta_t(f\langle g, h\rangle)(r)$. Por lo tanto $\delta_t(f)\langle \delta_t(g), \delta_t(h)\rangle = \delta_t(f\langle g, h\rangle)$ y utilizando que δ_t es continua deducimos que es un homomorfismo de módulos de Hilbert.

Veamos ahora que δ es una acción parcial. Tomemos $f \in \mathcal{Y}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}_{t^{-1}s^{-1}} = \mathcal{Y}(A_{t^{-1}} \cap A_{t^{-1}s^{-1}})$. Luego existen sucesiones $\{f_n\}_n \subset C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$, $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subset A_{t^{-1}} \cap A_{t^{-1}s^{-1}}$ tales que $\|f - f_n a_n b_n\| \to 0$. Como $\delta_t(f_n a_n b_n) = \delta_t(f_n a_n)\alpha_t(b_n) \in \mathcal{Y}^0_{s^{-1}}$, $\alpha_t(b_n) \in A_{s^{-1}}$ y

$\delta_t(f_n a_n b_n) \to \delta_t(f)$, tenemos $\delta_t(f) \in \mathcal{Y}_{s^{-1}}$. Además

$$\delta_s(\delta_t(f a_n b_n))(r) = \gamma_s(\gamma_t(f a_n b_n(r^{-1}s^{-1}))) = \gamma_{st}(f a_n b_n((st)^{-1}r)) = \delta_{st}(f a_n b_n)(r),$$

por lo que $\delta_s(\delta_t(f)) = \text{lím}_n \, \delta_s(\delta_t(f a_n b_n)) = \text{lím}_n \, \delta_{st}(f a_n b_n) = \delta_{st}(f)$, probando que δ es una acción parcial.

Para terminar apelaremos al Teorema 1.45. Dada $f \in C_c^\gamma(G, \mathcal{X})$ y $g \in C_c^\alpha(G, A)$ definamos $[f, g] \in C_c^\gamma(G, \mathcal{Y})$ de manera que $[f, g](r) = fg(r)$. Llamemos S al conjunto formado por todas las funciones de la forma $[f, g]$. Dados $t \in G$, $u \in \mathcal{Y}_t$ y $\varepsilon > 0$ tomemos $f \in C_c^\gamma(G, \mathcal{X})$ y $a \in A_t$ tal que $\|u - fa\| < \varepsilon$. Ahora tomemos $g \in C_c^\alpha(G, A)$ tal que $g(t) = a$. Luego $\|u - [f, g](t)\| < \varepsilon$, de lo que deducimos que $S(t)$ es denso en $\mathcal{Y}_t$.

Fijemos $[f, g] \in S$ y $t_0 \in G$ y mostremos que $u : G \to \mathcal{Y},\ t \mapsto \delta_t([f, g](t))$, es continua en t_0. Tomemos un entorno compacto U de t_0. Luego, para cada $t \in U$, $\text{sop}(\delta_t([f, g](t))) \subset U\text{sop}(f) =: K$ por lo que

$$\|\delta_t([f, g](t)) - \delta_{t_0}([f, g](t_0))\|^2 \leq \mu(K) \|\delta_t([f, g](t)) - \delta_{t_0}([f, g](t_0))\|_\infty^2.$$

Nos bastará con probar que u es continua con la norma del supremo.

Tomemos una red $\{t_i\}_i$ que converge a t_0. Para mostrar que $\{u(t_i)\}_i$ converge uniformemente a $u(t_0)$ basta con probar que para toda red convergente $\{r_i\}_i$ (a cierto $r \in G$) se cumple que $u(t_i)(r_i) \to u(t_0)(r)$. Esto se deduce de que γ, f y a son continuas pues ello implica que

$$\lim_i u(t_i)(r_i) = \lim_n \gamma_{t_i}(f({t_i}^{-1} r_i) a(t_i)) = \gamma_{t_0}(f({t_0}^{-1} r) a(t_0)) = \delta_{t_0}([f, g])(r) = u(t_0)(r).$$

Concluimos que δ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{Y} = L^2_\gamma(G, \mathcal{X})$.

Observación 1.47. $L^2_\gamma(G, \mathcal{X})$ es un $A-$módulo pleno. Para mostrar esto basta con probar que todo funcional lineal continuo $\phi\colon A \to \mathbb{C}$ que se anula en $\langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \rangle$ es nulo. Si $\phi\colon A \to \mathbb{C}$ es lineal, continuo y se anula en $\langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \rangle$ entonces para todo $f, g \in C_c^\gamma(G, \mathcal{X})$ y $\lambda \in C_c(G)$ se tiene que $0 = \phi(\langle \lambda f, g \rangle) = \int_G \lambda(t) \phi(\langle f(t), g(t) \rangle) \, dt$. Tomando $\lambda(t) = \overline{\phi(\langle f(t), g(t) \, dt)}$ deducimos $t \mapsto \phi(\langle f(t), g(t) \rangle)$ es la función nula. Luego ϕ se anula en $\text{span}\{\langle f(e), g(e) \rangle \colon f, g \in C_c^\gamma(G, \mathcal{X})\}$, que es un ideal denso de A. Luego $\phi = 0$.

Observación 1.48. De la construcción de δ se deduce que $\delta^r = \gamma^r$.

Volviendo a la teoría de acciones parciales en módulos de Hilbert definimos los morfismos.

Definición 1.49. Sean γ y δ acciones parciales en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Diremos que $\phi\colon \gamma \to \delta$ es un *morfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert* si

$\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un homomorfismo de módulos de Hilbert que también es un morfismo de acciones parciales en conjuntos.

La *composición de morfismos de acciones parciales en módulos de Hilbert* se define como la composición de funciones y la identidad de γ es la identidad en $\mathcal{X}$.

1.4.2. Construcción de acciones parciales

Enunciamos tres resultados que se encuentran en [Aba03] en el contexto de los C*-anillos.

Lema 1.50. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$ y para cada $t \in G$ se define $\widetilde{\gamma}_t\colon \widetilde{\mathcal{X}_{t^{-1}}} \to \widetilde{\mathcal{X}_t}$ como $\widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) := \gamma_t(x)^{\sim}$, entonces $\widetilde{\gamma} := \left(\{\widetilde{\gamma}_t\}_{t\in G}, \{\widetilde{\mathcal{X}_t}\}_{t\in G}\right)$ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\widetilde{\mathcal{X}}$.*

Corolario 1.51. *El isomorfismo canónico de $A_{\mathcal{X}}$ con $\mathbb{K}(\widetilde{\mathcal{X}})$ es un isomorfismo entre γ^r y $\widetilde{\gamma}^l$. Luego γ^l es isomorfa a $\widetilde{\gamma}^r$.*

Proposición 1.52. *Si $\phi\colon \gamma \to \delta$ es un morfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert entonces $\phi^r\colon \gamma^r \to \delta^r$ y $\phi^l\colon \gamma^l \to \delta^l$ son morfismos de acciones parciales en C*-álgebras. También se cumple que, dado otro morfismo ψ, $(\phi\circ\psi)^r = \phi^r \circ \psi^r$, $(\phi\circ\psi)^l = \phi^l\circ\psi^l$, $\mathrm{id}_\gamma{}^r = \mathrm{id}_{\gamma^r}$ e $\mathrm{id}_\gamma{}^l = \mathrm{id}_{\gamma^l}$. Por lo tanto, si ϕ es un isomorfismo entonces ϕ^r y ϕ^l son isomorfismos.*

Como en el caso de las C*-álgebras podemos obtener nuevas acciones parciales en módulos de Hilbert restringiendo acciones parciales a ideales.

Lema 1.53. *Supongamos que γ acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y que I es ideal de A. Luego la restricción $\gamma|_{\mathcal{X}I}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert y $\gamma|_{\mathcal{X}I}{}^r = \gamma^r|_I$. Además, $\gamma|_{\mathcal{X}I}{}^l = \gamma^l|_{\mathbb{K}(\mathcal{X}I)}$.*

Demostración. Para simplificar la notación llamemos α a γ^r, $\mathcal{Y} := \mathcal{X}I$, $\beta := \alpha|_I$ y $\delta := \gamma|_{\mathcal{Y}}$. El Lema 1.9 nos dice que δ es una acción parcial continua. Veamos que para cada $t\in G$ se cumple que $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}I_t$. En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}\cap\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}}\cap\mathcal{Y}) &= (\mathcal{X}I)\cap\gamma_t((\mathcal{X}A_{t^{-1}})\cap(\mathcal{X}I)) = (\mathcal{X}I)\cap\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}}A_{t^{-1}}I)\\ &= (\mathcal{X}I)\cap\mathcal{X}_t\cap\alpha_t(A_{t^{-1}}I) = \mathcal{X}(I\cap\alpha_{t^{-1}}(A_{t^{-1}}I)) = \mathcal{X}I_t.\end{aligned}$$

Luego el Lema 1.35 implica que $\{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G}$ es una familia continua de ideales de $\mathcal{Y}$.

Para terminar de mostrar que δ es una acción parcial en módulos de Hilbert apelamos al Teorema 1.45. Dado $x\in\mathcal{X}$ y una $\{I_t\}_{t\in G}-$sección f definamos $[x,f]\colon G\to\mathcal{Y}$ como

$[x, f](t) = xf(t)$. Luego $[x, f]$ es una $\{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G}-$sección continua. Llamemos S al conjunto formado por tales secciones, luego $S(t) = \mathcal{Y}_t$, para todo $t \in G$. Además $t \mapsto \delta_t([x, f](t^{-1}))$ es continua pues coincide con $t \mapsto \gamma_t(xf(t^{-1}))$.

Habiendo mostrado que δ es una acción parcial en módulos veamos que $\delta^r = \beta$. Estas acciones tienen los mismos dominios pues $I_{\mathcal{Y}_t} = \overline{\operatorname{span}}\, I_t\langle\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle I_t = I_t$. Por otra parte para cada $t \in G$ y $x, y \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ tenemos que $\beta_t(\langle x, y\rangle) = \langle\gamma_t(x), \gamma_t(y)\rangle = \langle\delta_t(x), \delta_t(y)\rangle = \delta^r_t(\langle x, y\rangle)$. Esto implica que β_t coincide con δ^r_t en un conjunto denso, por lo tanto $\beta_t = \delta^r_t$.

La igualdad $\delta^r = \gamma^r|_{\mathbb{K}(\mathcal{Y})}$ se deduce de lo anterior considerando la acción adjunta $\widetilde{\gamma}$. □

1.4.2.1. Sumas directas

Tomemos dos módulos de Hilbert, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, sobre la misma C*-álgebra A. La suma directa $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ puede equiparse con dos estructuras diferentes de módulo de Hilbert: una de $A-$módulo y otra de $A \oplus A$ módulo siendo sus respectivos productos internos

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2\rangle_A := \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle \text{ y } \langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2\rangle_{A\oplus A} := \langle x_1, x_2\rangle \oplus \langle y_1, y_2\rangle.$$

En el caso $A = \mathcal{X} = \mathcal{Y} = C_0(X)$ el segundo de estos módulos es $C_0(X \sqcup X)$, donde $\sqcup$ denota la unión disjunta de espacios topológicos. Para evitar confusiones denotaremos $\mathcal{X} \boxplus \mathcal{Y}$ al segundo tipo de suma directa[1].

Más en general tomemos un conjunto no vacío J y una familia de módulos de Hilbert $\{\mathcal{X}_j\}_{j\in J}$, donde $\mathcal{X}_j$ es un A_j-módulo no necesariamente pleno ($j \in J$). Definamos

$$\boxplus_{j\in J}\, \mathcal{X}_j := \{x \in \Pi_{j\in J}\mathcal{X}_j \colon J \to \mathbb{R},\ j \mapsto \|x(j)\|,\ \text{se anula en infinito}\}, \tag{1.4.1}$$

con la norma del supremo y las operaciones de suma y producto por escalares punto a punto. La suma $\boxplus_{j\in J} A_j$ está equipada con la multiplicación e involución punto a punto, con lo cual obtenemos una C*-álgebra. El producto interno y la acción de $\boxplus_{j\in J} A_j$ que hacen de $\boxplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ un módulo de Hilbert son

$$\langle x, y\rangle(k) = \langle x(k), y(k)\rangle \text{ y } xa(k) = x(k)a(k),\ \forall\ x, y \in \boxplus_{j\in J}\mathcal{X}_j,\ a \in \boxplus_{j\in J} A_j, k \in J.$$

Llamamos la atención al lector de que en la Ecuación 1.4.1 hemos elegido la frase “se anula en infinito” en lugar de “está acotada superiormente” para obtener la identificación $C_0(\sqcup_{j\in J} X_j) = \boxplus_{j\in J} C_0(X_j)$ siempre que $\{X_j\}_{j\in J}$ sea una familia de espacios HLC.

[1]Seleccionamos un símbolo cuadrado para recordarnos al símbolo cuadrado de unión disjunta.

Proposición 1.54. *Sea J un conjunto no vacío, G un grupo HLC y $\{\gamma^j\}_{j\in J}$ una familia de acciones parciales en módulos de Hilbert, donde γ^j es una acción parcial de G en ${\mathcal{X}_j}_{A_j}$. Luego existe una única acción parcial γ de G en $\boxplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ de forma que para todo $t \in G$ se tiene que $\gamma_t\colon \boxplus_{j\in J}\, {\mathcal{X}_j}_{t^{-1}} \to \boxplus_{j\in J}{\mathcal{X}_j}_t$ satisface $\gamma_t(x)_j = {\gamma^j}_t(x_j)$, para todo $j \in J$ y $x \in \boxplus_{j\in J}{\mathcal{X}_j}_{t^{-1}}$. Además $\gamma^r = \boxplus_{j\in J}{\gamma^j}^r$.*

Demostración. Definamos $\mathcal{X} := \boxplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$, $A := \boxplus_{j\in J}A_j$ y para $t \in G$ $\mathcal{X}_t := \boxplus_{j\in J}{\mathcal{X}_j}_t$ y $A_t := \boxplus_{j\in J}{A_j}_t$.

Para mostrar que $\mathcal{X}$ es pleno tomemos $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Existe un conjunto finito $K \subset J$ de forma que $\|a(j)\| < \varepsilon/2$ si $j \notin K$. Por otro lado para cada $j \in K$ existen $x_{j,1}, \ldots, x_{j,n_j}, y_{j,1}, \ldots, y_{j,n_j} \in \mathcal{X}_j$ de forma que $\|a(j) - \sum_{p=1}^{n_j}\langle x_{j,p}, y_{j,p}\rangle\| < \varepsilon$. Sea $m := \max_{j\in K} n_j$. Completando las listas de los $x_{j,p}$ e $y_{j,p}$ con 0 podemos asumir que $n_j = m$ para todo $j \in K$. Para cada $p = 1, \ldots, m$ definamos $x^p \in \mathcal{X}$ como ${x^p}_j = 0$ si $j \notin K$ y ${x^p}_j = x_{j,p}$ si $j \in K$. Definiendo y^p análogamente obtenemos que $\|a - \sum_{p=1}^{m}\langle x^p, y^p\rangle\| < \varepsilon$, con lo cual demostramos que $\mathcal{X}$ es un $A-$módulo pleno. Notemos, además, que cada A_t es un ideal de A y que lo anterior implica que $A_{\mathcal{X}_t} = A_t$.

Para construir una familia de $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}$ secciones continuas llamemos, para cada $j \in J$, S_j al conjunto de las $\{{\mathcal{X}_j}_t\}_{t\in G}$ secciones continuas. Sea

$$A := \{u \in \Pi_{j\in J}S_j \colon \{j \in J \colon u_j \neq 0\} \text{ es finito}\}.$$

Para cada $u \in A$ definamos $F_u\colon G \to \mathcal{X}$ como $F_u(t) = u_j(t)$. Luego $S := \{F_u \colon u \in A\}$ es una familia de $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}$ secciones continuas. Combinando los argumentos del segundo párrafo con el hecho de que $\{v(t)\colon v \in S_j\} = {\mathcal{X}_j}_t$ para todo $t \in G$ y $j \in J$, deducimos que $\{F(t)\colon F \in S\}$ es denso en $\mathcal{X}_t$.

Dejamos al lector la verificación de que $\gamma := (\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\gamma_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial en módulos de Hilbert si consideramos en G la topología discreta. Ahora apelamos al Teorema 1.45 para afirmar que basta con mostrar que para cada $F_u \in S$ la función $t \mapsto \gamma_t(F_u(t^{-1}))$ es continua. Para cada $j \in J$ se tiene que $\gamma_t(F_u(t^{-1}))_j = {\gamma^j}_t(u_j(t^{-1}))$, por lo que $t \mapsto \gamma_t(F(t^{-1}))_j$ es continua. Como $\{j \in J \colon u_j \neq 0\}$ es finito lo anterior implica que $t \mapsto \gamma_t(F_u(t^{-1}))$ es continua. $\square$

Definición 1.55. La acción γ dada por la Proposición anterior se denota $\boxplus_{j\in J}\gamma^j$ y se denomina *suma directa externa* de la familia $\{\gamma^j\}_{j\in J}$. En caso que $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ escribiremos $\gamma^{j_1} \boxplus \cdots \boxplus \gamma^{j_n}$.

Para definir el segundo tipo de suma directa tomemos un conjunto J, una C*-álgebra A y una familia de $A-$módulos $\{\mathcal{X}_j\}_{j\in J}$. Denotemos $\mathcal{P}$ al conjunto de partes finitas de

J, que ordenamos de acuerdo a $U \leq V$ sii $U \subset V$. Dados $x, y \in \Pi_{j\in J}\mathcal{X}_j$ y un conjunto finito $U \subset J$ definimos $\sum_U \langle x, y\rangle := \sum_{j\in U}\langle x_j, y_j\rangle$ y denotamos $\oplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ al conjunto de las $x \in \Pi_{j\in J}\mathcal{X}_j$ tales que $\{\sum_U \langle x, x\rangle\}_{U\in\mathcal{P}}$ es una red de Cauchy en A.

Note el lector el uso de los símbolos $\boxplus$ y $\oplus$ para los diferentes tipos de sumas directas de módulos. Es inconveniente usar indistintamente los símbolos $\oplus$ y $\boxplus$ aún tratándose de C*-álgebras pues ¿qué significaría, en tal caso, $A\oplus A$? Con nuestra notación si pensamos en una C*-álgebra escribirmos $A \boxplus A$ y $A \oplus A$ si pensamos en el $A-$módulo.

Proposición 1.56. *Dadas $x, y \in \oplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ la red $\{\sum_U \langle x, y\rangle\}_{U\in\mathcal{P}}$ es de Cauchy. Además $\oplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ es un $A-$módulo de Hilbert con la acción $xa(j) = x(j)a$ y el producto interno $\langle x, y\rangle = \mathrm{lím}_U \sum_U \langle x, y\rangle$. El módulo $\oplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ es pleno sii $\sum_{j\in J} A_{\mathcal{X}_j}$ es denso en A.*

Demostración. Ver [RW98, Ejemplo 2.14 y Proposición 2.15]. □

Proposición 1.57. *Supongamos que $\{\mathcal{X}_j\}_{j\in J}$ una familia de $A-$módulos de Hilbert plenos, que α es una acción parcial de G en A y que $\{\gamma^j\}_{j\in J}$ es una familia de acciones parciales en módulos de Hilbert de manera que γ^j es una acción parcial en $\mathcal{X}_j$ y $\gamma^{j^r} = \alpha$. Luego existe una única acción parcial en módulos de Hilbert, γ, de G en $\mathcal{Y} := \oplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ de manera que $\gamma^r = \alpha$ y $\gamma_t(x)_j = \gamma^j_t(x_j)$, para todo $x \in \mathcal{Y}_{t^{-1}} = \mathcal{Y}A_{t^{-1}}$, $t \in G$ y $j \in J$.*

Demostración. Para que γ^r sea α debemos definir $\mathcal{Y}_t := \mathcal{Y}A_t$, por lo que $\{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G}$ es una familia continua. Dada $x \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ definamos $\gamma_t(x) \in \Pi_{j\in J}\mathcal{X}_j$ de acuerdo a $\gamma_t(x)_j = \gamma^j_t(x_j)$. Para cada $U \in \mathcal{P}$ tenemos que $\sum_U \langle \gamma_t(x), \gamma_t(x)\rangle = \alpha_t(\sum_U \langle x, x\rangle)$. Como α es continua y $x \in \mathcal{Y}$, $\gamma_t(x) \in \mathcal{Y}_t = \oplus_{j\in J}X_jA_t$. Además γ_t es lineal y si $x, y, z \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ entonces

$$\gamma_t(x)\langle\gamma_t(y), \gamma_t(z)\rangle = (\gamma^j_t(x_j)\langle\gamma^j_t(y_j), \gamma^j_t(z_j)\rangle)_{j\in J} = (\gamma^j_t(x\langle y, z\rangle_j))_{j\in J} = \gamma_t(x\langle y, z\rangle),$$

con lo que mostramos que $\gamma_t\colon \mathcal{Y}_{t^{-1}} \to \mathcal{Y}_t$ es un homomorfismo de módulos de Hilbert.

Probemos que $\gamma = (\{\gamma_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial en módulos de Hilbert. Es evidente que $\gamma_e = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$. Si $x \in \mathcal{Y}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}_{t^{-1}s^{-1}}$ entonces $\gamma_t(x) \in \oplus_{j\in J}\gamma^j_t(\mathcal{X}_{j_{t^{-1}}} \cap \mathcal{X}_{j_{t^{-1}s^{-1}}}) \subset \oplus_{j\in J}\mathcal{X}_{j_{s^{-1}}} = \mathcal{Y}_{s^{-1}}$ y $\gamma_s(\gamma_t(x)) = (\gamma^j_s(\gamma^j_t(x_j)))_{j\in J} = (\gamma^j_{st}(x_j))_{j\in J} = \gamma_{st}(x)$.

Dada $f \in C^{\gamma^j}_c(G, \mathcal{X}_j)$ definamos $[j, f] \in C^{\gamma}_c(G, \mathcal{Y})$ como $[j, f](t)_k = 0$ si $k \neq j$ y $[j, f](t)_k = f(t)$ si $k = j$. El conjunto $S = \{[j, f] \colon j \in J,\ f \in C^{\gamma^j}_c(G, \mathcal{X}_j)\}$ cumple, para todo $t \in G$, que $\overline{\mathrm{span}}\, S(t) = \mathcal{Y}_t$ pues todo $x \in \mathcal{Y}_t$ puede aproximarse arbitrariamente por un elementos $x' \in \mathcal{Y}_t$ tales que $\{j \in J \colon x'_j \neq 0\}$ es finito. Ahora bien, si $[j, f] \in S$ entonces para todo $s, t \in G$ $\|\gamma_s([j, f](s^{-1})) - \gamma_t([j, f](t^{-1}))\| = \|\gamma^j_s(f(s^{-1})) - \gamma^j_t(f(t^{-1}))\|$. Por lo que la continuidad de $t \mapsto \gamma_s([j, f](s^{-1}))$ se deduce de la continuidad de $t \mapsto \gamma^j_s(f(s^{-1}))$. □

Definición 1.58. La acción parcial dada por la Proposición anterior se denomina *suma directa* de $\{\gamma^j\}_{j\in J}$ y se denota $\oplus_{j\in J}\gamma^j$. En caso que J sea finito, $J=\{j_1,\dots,j_n\}$, escribimos $\gamma^{j_1}\oplus\cdots\oplus\gamma^{j_n}$.

1.4.2.2. Productos tensoriales

Tomemos acciones parciales en módulos de Hilbert, γ y δ, de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_B$, respectivamente. Llamaremos α a γ^r y β a δ^r.

Definición 1.59. Una función $\phi\colon A\to\mathbb{B}(\mathcal{Y})$ es un *homomorfismo* $(\alpha,\gamma)-$*equivariante* si es un $*-$homomorfismo y para todo $t\in G$, $a\in A_{t^{-1}}$ e $y\in\mathcal{Y}_{t^{-1}}$ cumple que $\phi(\alpha_t(a))\delta_t(y)=\delta_t(\phi(a)y)$.

Diremos que ϕ es un *homomorfismo de construcción de productos tensoriales* si es un homomorfismo equivariante y para todo $t\in G$, $\phi(A)\mathcal{Y}_t=\phi(A_t)\mathcal{Y}_t$.

Fijemos un homomorfismo de construcción de productos tensoriales $\phi\colon A\to\mathbb{B}(\mathcal{Y})$. En el producto tensorial algebraico $\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}$ consideremos el pre-producto interno[2] q que satisface $q(x\odot y,z\odot w)=\langle y,\phi(\langle x,z\rangle_A)w\rangle_B$.

En el cociente $\mathcal{X}\otimes_0\mathcal{Y}=\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}/\{u\in\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}\colon q(u,u)=0\}$, q define un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y tenemos una proyección canónica $\pi\colon\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\otimes_0\mathcal{Y}$, $\pi(x\odot y)=x\otimes y$. El módulo $\mathcal{X}\otimes_\phi\mathcal{Y}$ es la completación de $\mathcal{X}\otimes_0\mathcal{Y}$ con respecto a la norma $\|v\|:=\|\langle u,u\rangle\|^{1/2}$, la acción de B en $\mathcal{X}\otimes_\phi\mathcal{Y}$ es la única que satisface $(x\otimes y)b=x\otimes(yb)$. Además se cumple que $xa\otimes y=x\otimes\phi(a)y$.

Observación 1.60. Para todo $S\in\mathbb{B}(\mathcal{X})$ existe un único operador $S\otimes 1\in\mathbb{B}(\mathcal{X}\otimes_\phi\mathcal{Y})$ tal que $S\otimes 1(x\otimes y)=Sx\otimes y$. Si, además, $\phi(A)$ está contenido en el centro de $\mathbb{B}(\mathcal{Y})$ entonces para cada $T\in\mathbb{B}(\mathcal{Y})$ existe un único operador $1\otimes T\in\mathbb{B}(\mathcal{X}\otimes_\phi\mathcal{Y})$ tal que $1\otimes T(x\otimes y)=x\otimes Sy$. En este último caso definimos, para cada $(S,T)\in\mathbb{B}(\mathcal{X})\times\mathbb{B}(\mathcal{Y})$, $S\otimes T:=(S\otimes 1)\circ(1\otimes T)=(1\otimes T)\circ(S\otimes 1)$.

Ya considerando las acciones parciales observemos que para cada $t\in G$ tenemos que

$$(\mathcal{X}\otimes_\phi\mathcal{Y})B_t=\overline{\operatorname{span}}\,\mathcal{X}A\otimes\mathcal{Y}_t=\overline{\operatorname{span}}\,\mathcal{X}\otimes\phi(A)\mathcal{Y}_t=\overline{\operatorname{span}}\,\mathcal{X}\otimes\phi(A_t)\mathcal{Y}_t=\mathcal{X}_t\otimes_\phi\mathcal{Y}_t.$$

Teorema 1.61. *Supongamos que γ y δ son acciones parciales en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_B$ y que $\phi\colon A\to\mathbb{B}(\mathcal{Y})$ es un homomorfismo de construcción de productos tensoriales (respecto de $\alpha:=\gamma^l$ y δ). Luego existe una única acción parcial de módulos de Hilbert, $\gamma\otimes_\phi\delta$, de G en $\mathcal{X}\otimes_\phi\mathcal{Y}$ de manera que*

[2] Queremos decir que se cumplen las condiciones algebraicas de los productos internos de módulos de Hilbert a no ser $\langle x,x\rangle=0\Rightarrow x=0$.

- $(\mathcal{X} \otimes_\phi \mathcal{Y})_t = \mathcal{X}_t \otimes_\phi \mathcal{Y}_t$ *para todo* $t \in G$ *y*
- $(\gamma \otimes_\phi \delta)_t(x \otimes y) = \gamma_t(x) \otimes \delta_t(y)$, *para todo* $t \in G$, $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ *e* $y \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$.

Además $B_{\mathcal{X}\otimes_\phi \mathcal{Y}}$ *es un ideal* δ^r-*invariante de* B *y* $(\gamma \otimes_\phi \delta)^r$ *es la restricción de* δ^r *a ese ideal. Si* ϕ *es no degenerado entonces* $(\gamma \otimes_\phi \delta)^r = \delta^r$.

Demostración. Los comentarios previos al enunciado implican que $(\mathcal{X} \otimes_\phi \mathcal{Y})_t := \mathcal{X}_t \otimes_\phi \mathcal{Y}_t = (\mathcal{X} \otimes_\phi \mathcal{Y})B_t$, lo que nos dice que $(\mathcal{X} \otimes_\phi \mathcal{Y})_t$ es un submódulo inducido por ideales.

Fijemos $t \in G$. Dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ e $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ definamos $u := \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathcal{X}_{t^{-1}} \otimes_\phi \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ y $v := \sum_i \gamma_t(x_i) \otimes \delta_t(y_i) \in \mathcal{X}_t \otimes_\phi \mathcal{Y}_t$. Luego $\|u\| = \|v\|$ pues

$$\begin{aligned}
\delta_t^r(\langle u, u\rangle) &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \delta_t(y_i), \delta_t(\phi(\langle x_i, x_j\rangle)y_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \delta_t(y_i), \phi(\langle \gamma_t(x_i), \gamma_t(x_j)\rangle)\delta_t(y_j)\rangle \\
&= \langle v, v\rangle;
\end{aligned}$$

por lo que existe un único mapa lineal e isométrico $\theta_t \colon \mathcal{X}_{t^{-1}} \otimes_\phi \mathcal{Y}_{t^{-1}} \to \mathcal{X}_t \otimes_\phi \mathcal{Y}_t$ tal que $\theta_t(x \otimes y) = \gamma_t(x) \otimes \delta_t(y)$. Además, para $x_i \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ e $y_i \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned}
\theta_t(x_1 \otimes y_1)\langle \theta_t(x_2 \otimes y_2), \theta_t(x_3 \otimes y_3)\rangle &= \gamma_t(x_1) \otimes \delta_t(y_1)\langle \delta_t(y_2), \phi(\langle \gamma_t(x_2), \gamma_t(x_3)\rangle)\delta_t(y_3)\rangle \\
&= \gamma_t(x_1) \otimes \delta_t(y_1\langle y_2, \phi(\langle x_2, x_3\rangle)y_3\rangle \\
&= \theta_t(x_1 \otimes y_1\langle x_2 \otimes y_2, x_3 \otimes y_3\rangle).
\end{aligned}$$

Con argumentos de linealidad y continuidad se deduce que lo anterior implica que θ_t es un homomorfismo de módulos de Hilbert.

Si existe la acción parcial de la tesis entonces ésta debe ser $\theta := (\{\theta_t\}_{t\in G}, \{\mathcal{X}_t \otimes_\phi \mathcal{Y}_t\}_{t\in G})$. Veamos que θ es una acción parcial en conjuntos. Para simplificar la notación llamemos $\mathcal{Z}$ a $\mathcal{X} \otimes_\phi \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_t := \mathcal{X}_t \otimes_\phi \mathcal{Y}_t$. Tomemos $u \in \mathcal{Z}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Z}_{t^{-1}s^{-1}}$. Como $\phi(A)\mathcal{Y}(B_{t^{-1}}B_{t^{-1}s^{-1}}) = \phi(A_{t^{-1}}A_{t^{-1}s^{-1}})\mathcal{Y}(B_{t^{-1}}B_{t^{-1}s^{-1}})$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Z}_{t^{-1}s^{-1}} &= \mathcal{X}A \otimes_\phi \mathcal{Y}(B_{t^{-1}}B_{t^{-1}s^{-1}}) = \mathcal{X} \otimes_\phi \phi(A)\mathcal{Y}(B_{t^{-1}}B_{t^{-1}s^{-1}}) \\
&= \mathcal{X}A_{t^{-1}}A_{t^{-1}s^{-1}} \otimes_\phi \mathcal{Y}B_{t^{-1}}B_{t^{-1}s^{-1}} \\
&= (\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{t^{-1}s^{-1}}) \otimes_\phi (\mathcal{Y}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}_{t^{-1}s^{-1}}).
\end{aligned}$$

Con lo cual $\theta_t(\mathcal{Z}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Z}_{t^{-1}s^{-1}}) = (\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) \otimes_\phi (\mathcal{Y}_t \cap \mathcal{Y}_{s^{-1}}) = \mathcal{Z}_t \cap \mathcal{Z}_{s^{-1}}$. Además, para cada $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{t^{-1}s^{-1}}$ e $y \in \mathcal{Y}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}_{t^{-1}s^{-1}}$ se tiene que $\theta_s(\theta_t(x \otimes y)) = \gamma_s(\gamma_t(x)) \otimes \delta_s(\delta_t(y)) = \gamma_{st}(x) \otimes \delta_{st}(y)$. Aproximando u por sumas de tensores elementales, usando la linealidad y continuidad de cada θ_r y la igualdad anterior, se deduce que $\theta_s(\theta_t(u)) = \theta_{st}(u)$.

Para terminar de mostrar que θ es una acción parcial en módulos de Hilbert usaremos el Teorema 1.45. Dadas $f \in C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ y $g \in C_c^\delta(G,\mathcal{Y})$ definamos $[f,g] \in C_c^\theta(G,\mathcal{Z})$ como $[f,g](t) = f(t) \otimes g(t)$. Sea $S := \{[f,g] \colon f \in C_c^\gamma(G,\mathcal{X}) \text{ y } g \in C_c^\delta(G,\mathcal{Y})\}$. Para cada $t \in G$, $x \in \mathcal{X}_t$ e $y \in \mathcal{Y}_t$ es posible encontrar $[f,g] \in S$ tal que $[f,g](t) = x \otimes y$. Por lo tanto $S(t)$ genera un espacio denso en $\mathcal{Z}_t$. Además $\theta_t([f,g](t^{-1})) = \gamma_t(f(t^{-1})) \otimes \delta_t(g(t^{-1}))$, por lo que $t \mapsto \theta_t([f,g](t^{-1}))$ es continua.

Por último calculamos θ^r. Como $B_{\mathcal{Z}} \cap B_{t^{-1}} = B_{\mathcal{Z}B_{t^{-1}}} = \overline{\operatorname{span}}\,\langle \mathcal{Y}_{t^{-1}}, \phi(A_{t^{-1}})\mathcal{Y}_{t^{-1}}\rangle$ y $\delta_t^r(\langle \mathcal{Y}_{t^{-1}}, \phi(A_{t^{-1}})\mathcal{Y}_{t^{-1}}\rangle) = \langle \mathcal{Y}_t, \phi(A_t)\mathcal{Y}_t\rangle$, se cumple que $\delta_t^r(B_{\mathcal{Z}} \cap B_{t^{-1}}) = B_{\mathcal{Z}} \cap B_t$. Además se verifica fácilmente que δ_t^r coincide con θ_t^r en los elementos de $\langle \mathcal{Y}_{t^{-1}}, \phi(A_{t^{-1}})\mathcal{Y}_{t^{-1}}\rangle = \langle \mathcal{Z}_{t^{-1}}, \mathcal{Z}_{t^{-1}}\rangle$, por lo que θ_t^r es la restricción de δ_t^r. Esto muestra que $\delta^r|_{B_{\mathcal{Z}}} = \theta^r$. En caso que ϕ sea no degenerada $B_{\mathcal{Z}} = \overline{\operatorname{span}}\,\langle \mathcal{Y}, \phi(A)\mathcal{Y}\rangle = \overline{\operatorname{span}}\,\langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y}\rangle = B$. □

Definición 1.62. La acción parcial $\gamma \otimes_\phi \delta$ construida en el teorema anterior se llama *producto tensorial* de γ y δ (según ϕ).

Ejemplo 1.7. Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, considerado con la acción trivial ($1_{\mathcal{H}}$) de G y con su producto lineal en la segunda variable. El homomorfismo trivial $\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$, $\phi(\lambda) = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ es de construcción de productos cruzados, lo que nos permite construir el producto $1_{\mathcal{H}} \otimes_\phi \gamma$.

Recordemos que si $\widetilde{\mathcal{X}}$ es el módulo adjunto de $\mathcal{X}_A$, la inclusión canónica $\phi \colon \mathbb{K}(\mathcal{X}) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ es un $*-$homomorfismo y que $\mathbb{B}(\widetilde{\mathcal{X}}) = M(A)$ (el álgebra de multiplicadores de A). Por lo tanto la inclusión canónica $\psi \colon A \to \mathbb{B}(\widetilde{\mathcal{X}})$ es un $*-$homomorfismo. Con ellos podemos construir los productos tensoriales $\widetilde{\mathcal{X}} \otimes_\phi \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \otimes_\psi \widetilde{\mathcal{X}}$. Los isomorfismos canónicos son $\widetilde{\mathcal{X}} \otimes_\phi \mathcal{X} \to A$, $\widetilde{x} \otimes y \mapsto \langle x|y\rangle$ y $\mathcal{X} \otimes_\psi \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathbb{K}(\mathcal{X})$, $x \otimes \widetilde{y} \mapsto |x\rangle\langle y|$.

Teorema 1.63. *Los isomorfismos canónicos $\widetilde{\mathcal{X}} \otimes_\phi \mathcal{X} \approx A$ y $\mathcal{X} \otimes_\psi \widetilde{\mathcal{X}} \approx \mathbb{K}(\mathcal{X})$ dan isomorfismos $\widetilde{\gamma} \otimes \gamma \approx \gamma^l$ y $\gamma \otimes \widetilde{\gamma} \approx \gamma^r$, respectivamente.*

1.5. Operadores adjuntables

Para poder hablar de operadores adjuntables entre dos módulos de Hilbert necesitamos la misma álgebra (a la derecha), es más, asumiremos que las acciones parciales en los módulos inducen la misma acción a derecha. Esto no es un inconveniente ya que podemos cambiar el álgebra a la derecha (por una isomorfa) sin cambiar la acción parcial en el módulo.

Definición 1.64. Diremos que γ es una $\alpha-$acción parcial (de G en $\mathcal{X}_A$) si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y $\gamma^r = \alpha$.

Recordamos que la notación $\mathcal{X}_A$ quiere decir que $\mathcal{X}$ es un $A-$módulo de Hilbert pleno, por lo que α es una acción parcial en A.

Definición 1.65. Sean γ y δ dos $\alpha-$acciones parciales de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_A$ respectivamente. Un *operador adjuntable* de γ en δ es un morfismo de acciones parciales (en conjuntos) $T\colon \gamma \to \delta$ que también es un operador adjuntable como función de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$.

Denotaremos $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ al conjunto formado por todos los operadores adjuntables de γ en δ y $\mathbb{K}(\gamma,\delta) := \mathbb{B}(\gamma,\delta)\cap\mathbb{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Supongamos que que $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es adjuntable. Luego para todo $t \in G$ se cumple que $T(\mathcal{X}_t) = T(\mathcal{X}A_t) = T(\mathcal{X})A_t \subset \mathcal{Y}_t$. Para verificar si T es un morfismo de acciones parciales basta verificar que para todo $t \in G$ y $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ se cumple que $T(\gamma_t(x)) = \delta_t(T(x))$.

La notación $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ no debería dar lugar a confusiones con los operadores adjuntables entre módulos de Hilbert ya que, fijado un grupo HLC, todo módulo ($\mathcal{X}$) puede equiparse con la acción global trivial del grupo ($\gamma_{\mathcal{X}}$). Con nuestra notación tenemos $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathbb{B}(\gamma_{\mathcal{X}},\gamma_{\mathcal{Y}})$ y $\mathbb{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathbb{K}(\gamma_{\mathcal{X}},\gamma_{\mathcal{Y}})$. Esta compatibilidad se extiende un poco más allá de lo anterior, como lo muestra el enunciado del Lema que veremos luego de recordar algunas definiciones y conceptos topológicos.

Observación 1.66. Identificando el álgebra de multiplicadores de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ con $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ se tiene que $\mathbb{B}(\gamma^l) = \mathbb{B}(\gamma)$.

Fijemos dos módulos de Hilbert, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, ambos sobre la misma álgebra. Cada elemento $x \in \mathcal{X}$ y cada $y \in \mathcal{Y}$ dan lugar a seminormas $p_x\colon \mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathbb{R}$ y $q_y\colon \mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathbb{R}$, definidas como $p_x(T) := \|Tx\|$ y $q_y(T) := \|T^*y\|$. La topología fuerte, o de la convergencia puntual, en $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas $\{p_x\}_{x\in\mathcal{X}}$. Esta topología se denota SOT (por Strong Operator Topology). La topología $*\,$SOT es la topología localmente convexa generada por la familia $\{p_x\}_{x\in\mathcal{X}}\cup\{q_y\}_{y\in\mathcal{Y}}$. Esta última topología es completa, es decir que $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es un espacio de Fréchet con la topología $*\,$SOT .

Llamemos τ a la topología de $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ definida por la norma de operadores. Utilizando la equivalencia entre la continuidad y la convergencia de redes es fácil mostrar que $\mathrm{id}\colon (\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\tau) \to (\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}),*\,\mathrm{SOT})$ e $\mathrm{id}\colon (\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}),*\,\mathrm{SOT}) \to (\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\mathrm{SOT})$ son continuas, por lo tanto $\mathrm{SOT} \subset *\,\mathrm{SOT} \subset \tau$. Esto implica que todo conjunto SOT cerrado es $*\,$SOT cerrado y todo conjunto $*\,$SOT cerrado es cerrado según τ.

En conjuntos acotados de $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ las topologías SOT y $*\,$SOT pueden describirse con familias de seminormas bastante menores que las de arriba. Luego de probar un resultado sobre ese tema mostraremos otro sobre operadores adjuntables y la estructura de espacio vectorial topológico de $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$.

Lema 1.67. *Supongamos que γ y δ son $\alpha-$acciones parciales de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_A$ y que $U\subset\mathcal{X}$ y $V\subset\mathcal{Y}$ son conjuntos tales que $\overline{[\gamma UA]}=\mathcal{X}$ y $\overline{[\delta VA]}=\mathcal{Y}$. Llamemos u a la topología vectorial localmente convexa de $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ generada por las seminormas $\{p_x\}_{x\in U}$ y v a la generada por la familia $\{p_x\}_{x\in U}\cup\{q_y\}_{y\in V}$. Luego en conjuntos acotados de $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ u coincide con la topología* SOT *y v con la* $*\,$SOT.

Demostración. Supongamos que $C\subset\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ es un conjunto tal que todos sus elementos tienen norma menor o igual a K. Como las familias de seminormas que definen a u y v están contenidas en las familias que definen a SOT y $*\,$SOT, la identidad $\mathrm{id}\colon\mathbb{B}(\gamma,\delta)\to\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ es SOT $-u$ y $*\,$SOT $-v$ continua. Por lo tanto $u\subset$ SOT y $v\subset *\,$SOT.

Supongamos ahora que la red $\{T_i\}_i\subset\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ está acotada y $u-$converge a $T\in\mathbb{B}(\gamma,\delta)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|T_i\|\leq 1$ para todo i (eso implica que $\|T\|\leq 1$). Tomemos $x\in\mathcal{X}$ y $\varepsilon>0$ y encontremos un i_0 de manera que si $i\geq i_0$ entonces $p_x(T_i-T)<\varepsilon$, eso implicará que en conjuntos acotados u es igual a SOT.

Como $[\gamma UA]$ es denso en $\mathcal{X}$ es posible encontrar $t_1,\ldots,t_n\in G$, $x_1,\ldots,x_n\in U$ y $a_1,\ldots,a_n\in A$ de manera que si $z:=\sum_{j=1}^n\gamma_{t_j}(x_ja_j)$ entonces $\|x-z\|<\varepsilon/3$. Luego

$$\begin{aligned}
p_x(T_i-T)&=\|T_ix-Tx\|\leq 2\|x-z\|+\|T_iz-Tz\|<\frac{2\varepsilon}{3}+\|T_iz-Tz\|\\
&<\frac{2\varepsilon}{3}+\sum_j\|(T_i-T)\circ\gamma_{t_j}(x_ja_j-x_ja_j)\|\leq\frac{2\varepsilon}{3}+\sum_j\|(T_ix_j-Tx_j)a_j\|\\
&\leq\frac{2\varepsilon}{3}+\sum_j p_{x_j}(T_i-T)\|a_j\|.
\end{aligned}$$

Como el último sumando tiende a cero con i podemos encontrar i_0 de manera que $\forall\, i\geq i_0$ $p_x(T_i-T)<\varepsilon$.

Si ahora suponemos que $\{T_i\}_i$ $v-$converge a T (seguimos asumiendo que están acotadas) entonces lo probado anteriormente implica que $T_i\to T$ y $T_i^*\to T^*$, ambas convergencias según SOT. Es decir que $T_i\to T$ según $*\,$SOT. $\square$

Lema 1.68. *Supongamos que γ,δ y ϱ son $\alpha-$acciones parciales de G en $\mathcal{X}_A,\mathcal{Y}_A$ y $\mathcal{Z}_A$, respectivamente. Luego las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

(1) $\mathbb{B}(\gamma,\delta)\circ\mathbb{B}(\varrho,\gamma)\subset\mathbb{B}(\varrho,\delta)$ *y* $\mathbb{B}(\gamma,\delta)^*=\mathbb{B}(\delta,\gamma)$.

(2) $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ *es un subespacio* SOT *cerrado de* $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *y* $\mathbb{B}(\gamma)$ *es una* C^**-subálgebra de* $\mathbb{B}(\mathcal{X})$.

(3) Si $T \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ es invertible en $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces $T^{-1} \in \mathbb{B}(\delta, \gamma)$.

(4) Para cada $T \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ tal que $T(\mathcal{X})$ es denso en $\mathcal{Y}$ y $T^*(\mathcal{Y})$ es denso en $\mathcal{X}$ existe un único unitario $U \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ de manera que $T = U|T|$, siendo $|T| := (T^*T)^{1/2}$.

(5) Todo unitario $U \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ es un isomorfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert.

Demostración. Tomemos dos operadores adjuntables: $T\colon \gamma \to \delta$ y $S\colon \delta \to \varrho$. Luego $S \circ T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ es adjuntable y $S \circ T\colon \gamma \to \delta$ es un morfismo de acciones parciales en conjuntos. Por lo tanto $S \circ T\colon \gamma \to \delta$ es adjuntable.

Veamos ahora que $T^*\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es un morfismo de acciones parciales. Fijemos $t \in G$ e $y \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$. Para mostrar que $T^*\delta_t(y) = \gamma_t(T^*y)$ basta mostrar que para todo $x \in \mathcal{X}_t$ se cumple que $\langle T^*\delta_t(y)|x\rangle = \langle \gamma_t(T^*y)|x\rangle$ ya que $T^*\delta_t(y), \gamma_t(T^*y) \in \mathcal{X}_t$. Además

$$\begin{aligned}\langle T^*\delta_t(y)|x\rangle &= \langle \delta_t(y)|Tx\rangle = \alpha_t(\langle y|\gamma_{t^{-1}}(Tx)\rangle) = \alpha_t(\langle y|T\gamma_{t^{-1}}(x)\rangle)\\ &= \alpha_t(\langle T^*y|\gamma_{t^{-1}}(x)\rangle) = \langle \gamma_t(T^*y)|x\rangle.\end{aligned}$$

Para mostrar la segunda afirmación tomemos una red $\{T_i\}_i \subset \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ converge según SOT a $T \in \mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Dados $t \in G$ y $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ se cumple que

$$\delta_t(Tx) = \lim_i \delta_t(T_i x) = \lim_i T_i\gamma_t(x) = T\gamma_t(x),$$

luego T es un morfismo de acciones parciales en conjuntos y $\mathbb{B}(\gamma, \delta)$ es SOT cerrado. En particular es $*$SOT y τ cerrado. Además es fácil mostrar que $\mathbb{B}(\gamma, \delta)$ es un subespacio de $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Luego $\mathbb{B}(\gamma)$ es una C*-subálgebra de $\mathbb{B}(\mathcal{X})$.

Veamos la tercera afirmación. Como T es adjuntable y biyectivo para todo $t \in G$ se cumple que $T(\mathcal{X}_t) = T(\mathcal{X}A_t) = T(\mathcal{X})A_t = \mathcal{Y}A_t = \mathcal{Y}_t$; el Lema 1.4 implica que T^{-1} es un morfismo de acciones parciales que también es adjuntable como función de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}$.

Pasemos a mostrar la cuarta afirmación. Afirmamos que $|T|$ tiene rango denso. En efecto, como T y T^* tienen rango denso y T^* es continua, $T^*T(\mathcal{X})$ es denso en $\mathcal{X}$. Además $|T|(\mathcal{X}) \supset |T|(|T|(\mathcal{X})) = T^*T(\mathcal{X})$. Por otro lado, para todos $x, y \in \mathcal{X}$ se tiene que $\langle |T|x||T|y\rangle = \langle T^*Tx|y\rangle = \langle Tx|Ty\rangle$. Luego existe una única isometría lineal $U\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tal que $U|T|x = Tx$. Es más, U es sobreyectivo y por continuidad se deduce que $\langle Ux|Uy\rangle = \langle x|y\rangle$, para todo $x, y \in U$. Luego U es adjuntable y $U^* = U^{-1}$. Es evidente que $T = U|T|$.

Veamos que U es un morfismo de acciones parciales en conjuntos. Fijemos $t \in G$. Debido a que $|T| \in \mathbb{B}(\gamma)$ y a que $|T|(\mathcal{X}_{t^{-1}})$ es denso en $\mathcal{X}_{t^{-1}}$, para mostrar que $U \circ \gamma_t|_{\mathcal{X}_{t^{-1}}} = \delta_t \circ$

$U|_{\mathcal{X}_{t^{-1}}}$ basta mostrar que para todo $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$, $U\gamma_t(|T|x) = \delta_t(U|T|x)$. Pero $U\gamma_t(|T|x) = U|T|\gamma_t(x) = T\gamma_t(x) = \delta_t(Tx) = \delta_t(U|T|x)$, lo que implica que $U\colon \gamma \to \delta$ es un operador adjuntable.

En cuanto a la última afirmación es evidente que para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ se cumple que $U(x\langle y|z\rangle) = U(x)\langle y|z\rangle = U(x)\langle U(y)|U(z)\rangle$, lo que nos dice que U es un morfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert. Además $U^{-1} = U^* \in \mathbb{B}(\delta, \gamma)$ es también unitario y por lo tanto un morfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert. Luego U es un isomorfismo. $\square$

Del resultado anterior se desprende inmediatamente lo siguiente.

Corolario 1.69. *Dadas dos $\alpha-$acciones parciales, γ y δ, $\mathbb{B}(\gamma, \delta)$ contiene un elemento invertible en $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ si y solamente si $\mathbb{B}(\gamma, \delta)$ contiene un unitario. Además las dos condiciones implican que γ es isomorfo a δ como acción parcial en módulos de Hilbert.*

El siguiente Teorema puede pensarse como un recíproco del Corolario anterior.

Teorema 1.70. *Supongamos que γ y δ son acciones parciales en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_B$, respectivamente, y que $\phi\colon \gamma \to \delta$ es un isomorfismo. Luego es posible dar a $\mathcal{Y}$ una estructura de $A-$módulo de Hilbert de manera que*

(1) Para todo $x, y, z \in \mathcal{Y}$ se cumple que $x\langle y|z\rangle_A = x\langle y|z\rangle_B$.

(2) δ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{Y}_A$ y $\delta^r = \gamma^r$.

(3) $\phi\colon \gamma \to \delta$ es adjuntable y unitario.

Demostración. Como ϕ es un isomorfismo $\pi := \phi^r\colon A \to B$ es un isomorfismo de C*-álgebras. Definamos en $\mathcal{Y}$ las operaciones de $A-$módulo de acuerdo a $ya := y\pi(a)$ y $\langle x|y\rangle_A = \pi^{-1}(\langle x|y\rangle_B)$. Es evidente que $x\langle y|z\rangle_A = x\pi^{-1}(\langle y|z\rangle_B) = x\langle y|z\rangle_B$.

Como los productos internos de $\mathcal{Y}$ definen la misma norma, la familia de dominios de γ, $\{\mathcal{Y}_t\}_{t\in G}$, es una familia continua de $\mathcal{Y}_A$. Veamos que es una familia de ideales. Para cada $t \in G$ se cumple que $\mathcal{Y}A_t = \mathcal{Y}\pi(A_t) = \mathcal{Y}B_t = \mathcal{Y}_t$, luego cada $\mathcal{Y}_t$ es un ideal de $\mathcal{Y}_A$. Además, para cada $x, y, z \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$ se cumple que

$$\gamma_t(x\langle y|z\rangle_A) = \gamma_t(x\langle y|z\rangle_B) = \gamma_t(x)\langle\gamma_t(y)|\gamma_t(z)\rangle_A = \gamma_t(x)\langle\gamma_t(y)|\gamma_t(z)\rangle_B.$$

Lo que implica que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{Y}_A$.

Arriba vimos que para todo $t \in G$ se cumple que $\mathcal{Y}A_t = \mathcal{Y}_t$. Luego γ^r y δ^r tienen el mismo dominio. Por otro lado, si $x, y \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$, el hecho de que $\pi\colon \gamma^r \to \delta^r$ es un isomorfismo de acciones parciales en C*-álgebras implica que

$$\begin{aligned}\gamma^r{}_t(\langle x|y\rangle_A) &= \gamma^r{}_t(\pi^{-1}(\langle x|y\rangle_B)) = \pi^{-1}(\delta^r{}_t(\langle x|y\rangle_B)) = \pi^{-1}(\langle \delta_t(x)|\delta^r{}_t(y)\rangle_B)\\ &= \delta^r{}_t(\langle x|y\rangle_A);\end{aligned}$$

lo que implica que $\gamma^r = \delta^r$ ya que cada $\gamma^r{}_t$ y $\delta^r{}_t$ son lineales, continuas y $A_t = \overline{\operatorname{span}}\, \langle \mathcal{X}_t|\mathcal{X}_t\rangle$.

Para terminar veamos que ϕ es un unitario. En efecto, dados $x, y \in \mathcal{X}$ se cumple que $\langle x|y\rangle_A = \pi^{-1}(\pi(\langle x|y\rangle_A)) = \pi^{-1}(\langle \phi(x)|\phi(y)\rangle_B) = \langle \phi x|\phi y\rangle_A$. Esto implica que $\phi^{-1} = \phi^*$. Luego $\phi \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ es un unitario. □

1.6. Globalizaciones

La teoría de globalización de acciones parciales en C*-álgebras está estrechamente relacionada, o puede pensarse como equivalente, a la teoría de globalización de acciones parciales en espacios HLC [Aba03]. En otros contextos, como en el algebraico [DE05], también es posible definir la globalización de acciones.

En los artículos antes citados podemos apreciar que el concepto de globalización (envolvente o no) depende únicamente de dos cosas: los morfismos y las restricciones. En el caso topológico se consideran restricciones de acciones a abiertos, en las C*-álgebras a ideales cerrados y en el algebraico a ideales algebraicos.

Definición 1.71. Supongamos que α es una acción parcial topológica, HLC, en C*-álgebras, o en módulos de Hilbert de G en X e Y es un subconjunto de X. Diremos que $\alpha|_Y$ es una *restricción admisible* si Y es abierto, abierto, ideal, o un ideal, respectivamente.

Con las restricciones admisibles y los isomorfismos obtenemos las globalizaciones:

Definición 1.72. Sea α una acción parcial topológica, HLC, en C*-álgebras, o en módulos de Hilbert de G en X. Una *globalización* de α es una cuaterna (β, ι, Z, Y) de manera que: β es una acción global del mismo tipo que α (topológica, HLC, en C*-álgebras, o en módulos de Hilbert, respectivamente) de G en Z; $\beta|_Y$ es una restricción admisible de β y $\iota\colon \alpha \to \beta|_Y$ es un isomorfismo de acciones parciales topológicas, HLC, en C*-álgebras, en módulos de Hilbert, respectivamente.

La noción de restricción minimal se obtiene de ordenar las restricciones admisibles de acuerdo a $\beta|_U \leq \beta|_V$ sii $U \subset V$.

Definición 1.73. La globalización (β, ι, Z, Y) es *minimal* si para toda restricción admisible y global $\beta|_W \geq \beta|_Y$ se cumple que $\beta|_W = \beta$.

Observemos que la restricción $\beta|_W$ es global sii W es $\beta-$invariante.

Proposición 1.74 ([Aba03])**.** *Supongamos que α es una acción parcial topológica, HLC, en C*-álgebras o en módulos de Hilbert de G en X y que (β, ι, Z, Y) es una globalización de α. Si definimos*

- *$W := \beta Y$ en caso que α sea una acción parcial topológica o HLC, y*
- *$W := \overline{\operatorname{span}}\, \beta Y$ en caso que α sea una acción parcial en C*-álgebras o en módulos de Hilbert;*

entonces $(\beta|_W, \iota, W, Y)$ es una globalización minimal de α. Además (β, ι, Z, Y) es minimal sii $W = Z$.

Demostración. Si α es una acción parcial topológica entonces $W = \beta Y = \cup_{t\in G}\beta_t(Y)$ es abierto y por lo tanto $\beta|_W$ es una restricción admisible. Además $\beta|_W|_Y = \beta|_Y$ y por lo tanto $\iota\colon \alpha \to \beta|_W|_Y$ es un isomorfismo. Esto nos dice que $(\beta|_W, \iota, W, Y)$ es una globalización de α. Si $\beta|_W|_V = \beta|_V \geq \beta|_Y$ es una restricción admisible y global, entonces V es un abierto $\beta-$invariante tal que $Y \subset V \subset W$. Por lo tanto $V = W$ y $\beta|_W|_V = \beta|_W$.

Supongamos ahora que α es una acción parcial en módulos de Hilbert. Veamos que W es un submódulo de Z inducido por ideales. Claramente W es un subespacio cerrado, que es $\beta-$invariante pues $\forall\ s \in G : \beta_s(W) = \overline{[\beta\beta_s(W)]} = W$. Además, como $Z\langle Y, Z\rangle \subset Y$,

$$Z\langle W, Z\rangle = \overline{\operatorname{span}}\,\{Z\langle \beta_t(Y), Z\rangle \colon t \in G\} = \overline{\operatorname{span}}\,\{\beta_t(Z\langle Y, Z\rangle)\colon t \in G\} \subset W;$$

con lo que mostramos que W es un submódulo inducido por ideales y que $\beta|_W$ es una restricción admisible y global.

Para mostrar que $\iota\colon \alpha \to \beta|_W|_Y = \beta|_Y$ es un isomorfismo basta con proceder como en el primer párrafo. Si $\beta|_W|_V = \beta|_V \geq \beta|_Y$ es una restricción admisible y global entonces V es un submódulo $\beta-$invariante inducido por ideales. Luego $V = W$ y $\beta|_W|_V = \beta|_W$. □

En el desarrollo de la teoría de acciones parciales topológicas la noción de acción minimal ha aparecido ligada a cierta propiedad universal (Teorema 1.18). Sin embargo, como veremos más adelante, la propiedad universal y la mimimalidad no son equivalentes.

Si bien la propiedad universal del Teorema 1.18 puede enunciarse para acciones parciales en C*-álgebras, parece ser difícil mostrar la existencia de una globalización con tal propiedad universal. Para explicar mejor el problema supongamos que β es una acción global en C*-álgebras de G en B, A es un ideal de B de forma que $\overline{\operatorname{span}}\,\beta A = B$ y definamos $\alpha := \beta|_A$. Los resultados contenidos en [Aba03] nos dicen que la clase de isomorfismo de β depende únicamente de α. La pregunta es si es verdad que

> *Dada una acción global en C*-álgebras, θ de G en C, y un morfismo de acciones parciales en C*-álgebras $\pi\colon \alpha \to \theta$ existe un único morfismo de acciones parciales en C*-álgebras $\widehat{\pi}\colon \beta \to \theta$ tal que $\widehat{\pi}|_A = \pi$.*

Esta última condición es extremadamente fuerte y desconocemos si es verdadera, falsa o indecidible. Sin embargo de [Aba03] se deduce que si, adicionalmente, hay un ideal D de C de forma que $\pi\colon \alpha \to \theta|_D$ es un isomorfismo entonces existe $\widetilde{\pi}$ como arriba. Es por ese motivo que adoptamos la siguiente definición.

Definición 1.75. Sea α una acción parcial topológica, HLC, en C*-álgebras o en módulos de Hilbert de G en X. Una *globalización envolvente* de α es una globalización (β, ι, Z, Y) de α con la siguiente propiedad universal: para toda globalización de α, (γ, κ, V, U), existe un único morfismo de acciones parciales topológica, HLC, en C*-álgebras o en módulos de Hilbert (respectivamente) $\widehat{\kappa}\colon \beta \to \gamma$ de manera que $\widehat{\kappa} \circ \iota = \kappa$.

Observación 1.76. Si (β, ι, Z, Y) y (γ, κ, V, U) son globalizaciones envolventes de α, entonces $\widehat{\kappa}$ es un isomorfismo con inverso $\widehat{\iota}$.

Siempre que exista una globalización minimal y envolvente toda globalización envolvente será minimal. El Teorema 1.21 nos dice que para las acciones parciales topológicas las globalizaciones envolventes son las mismas que las globalizaciones minimales. Sin embargo esto no es siempre así.

Digamos que α es una acción parcial en $\mathbb{R}-$espacios vectoriales de G en V si: $\alpha = (\{\alpha_t\}_{t\in G}, \{V_t\}_{t\in G})$ es una acción parcial en conjuntos de G en V, V es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, $\{V_t\}_{t\in G}$ es una familia de subespacios de V y cada α_t es lineal. Los morfismos entre acciones parciales en $\mathbb{R}-$espacios vectoriales serán los morfismos de acciones parciales en conjuntos que también son funciones $\mathbb{R}-$lineales. Las restricciones admisibles serán restricciones a subespacios; con lo cual quedan definidas las globalizaciones.

Tomemos como grupo $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y la acción α de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{R}$ definida como $\alpha_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $V_1 = V_2 = \{0\}$. Sean $\Omega := (\beta, \iota, \mathbb{R}^3, \{(x, 0, 0)\colon x \in \mathbb{R}\})$ y $\Xi := (\gamma, \kappa, \mathbb{R}^2, \{(x, 0)\colon x \in \mathbb{R}\})$ con: β la acción global de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{R}^3$ de manera que β_1 permuta la base canónica de acuerdo a $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_2, e_3, e_1)$, γ es la acción global de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{R}^2$ de manear que γ_1

es la rotación horaria de ángulo $2\pi/3$, $\iota(x) = (x, 0, 0)$ y $\kappa(x) = (x, 0)$. Tanto Ω como Ξ son globalizaciones minimales de α, pero β no es isomorfa a γ porque $\mathbb{R}^3$ no es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ (como espacio vectorial). Además Ω es envolvente.

Teorema 1.77. *Si α es una acción parcial topológica, HLC o en C*-álgebras entonces toda globalización minimal de α es una globalización envolvente.*

Demostración. Para las acciones parciales topológicas el enunciado es exactamente el enunciado del Teorema 1.21. En caso que α sea una acción parcial HLC llamemos α^{top} a α considerada como acción parcial topológica. Tomemos una globalización minimal de α, $\Omega = (\beta, \iota, Z, Y)$, y una globalización cualquiera de α, (γ, κ, V, U). Como Ω es una globalización minimal de α^{top}, también es envolvente para α^{top} y por lo tanto existe un único morfismo de acciones parciales topológicas $\widehat{\kappa}\colon \beta \to \gamma$ tal que $\widehat{\kappa} \circ \iota = \kappa$. Además $\widehat{\kappa}$ es un morfismo de acciones parciales HLC y su unicidad se deduce del hecho de que todo morfismo de acciones parciales HLC es un morfismo de acciones parciales topológicas.

Supongamos ahora que α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A y tomemos globalizaciones (β, ι, C, B) y (γ, κ, E, D) de α, siendo la primera minimal. Sea $E' := \overline{\mathrm{span}}\,[\gamma D]$, con lo cual $(\gamma|_{E'}, \kappa, E', D)$ es una globalización minimal de α. El Teorema 2.1 de [Aba03][3] implica que existe un único morfismo $f\colon \beta \to \gamma|_{E'}$ de manera que $f \circ \iota = \kappa$. Sea $\widehat{\kappa}$ la composición de f con la inclusión de $\gamma|_{E'}$ en γ. Luego $\widehat{\kappa}\colon \beta \to \gamma$ es un morfismo y $\widehat{\kappa} \circ \iota = \kappa$. Si existe otro morfismo $\nu\colon \beta \to \gamma$ tal que $\nu \circ \iota = \kappa$ entonces $\nu(C) = \nu(\overline{\mathrm{span}}\,[\beta B]) = \overline{\mathrm{span}}\,[\gamma D] \subset E'$; por lo que podemos pensar a ν también como un morfismo de β en $\gamma|_{E'}$. La unicidad de f implica que $\nu = f$, o sea que $\nu = \widehat{\kappa}$. $\square$

En el siguiente enunciado recurrimos a la correspondencia Θ entre acciones parciales en C*-álgebras conmutativas y acciones parciales HLC descrita en la Sección 1.3.1.

Teorema 1.78 (Abadie)**.** *Si σ es una acción parcial HLC de G en X entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) σ tiene una globalización.

(2) $\Theta(\sigma)$ tiene una globalización.

(3) $\mathrm{Gr}(\sigma)$ es cerrado en $G \times X \times X$.

Además (τ, ι, Z, Y) es una globalización (minimal, envolvente) de σ si y solamente si $(\Theta(\tau), \Theta(\iota), C_0(Z), C_0(Y))$ es una globalización (minimal, envolvente) de $\Theta(\sigma)$.

[3] Allí la noción de envolvente corresponde con nuestra noción de minimal, esa diferencia en la terminología será irrelevante luego de mostrado el presente Teorema.

Los resultados anteriores plantean dos preguntas: ¿es verdad que toda globalización minimal de una acción parcial en módulos de Hilbert es envolvente? y ¿puede darse una condición necesaria y suficiente (análoga a la tercera del Teorema anterior) para determinar si una acción parcial en C*-álgebras tiene una globalización? Ambas preguntas tienen respuestas afirmativas; la justificación es parte de lo que desarrollamos en la siguiente sección mientras que la justificación de la segunda es tema del Capítulo 3.

1.6.1. C*-álgebras y módulos de Hilbert

Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$ y que $\mathcal{Y}$ es un subconjunto de $\mathcal{X}$. El espacio generado por la órbita de $\mathcal{Y}$ es

$$[\gamma\mathcal{Y}] := \operatorname{span}\{\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}) \colon t \in G\}. \tag{1.6.1}$$

Teorema 1.79. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}$ es un submódulo cerrado de $\mathcal{X}$, entonces $[\gamma\mathcal{Y}]$ es el submódulo de $\mathcal{X}$ generado por la órbita de $\mathcal{Y}$ y $\overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$ es el menor submódulo cerrado $\gamma-$invariante que contiene a $\mathcal{Y}$.*

Por otra parte, si I es un ideal de A e $\mathcal{Y} = \mathcal{X}I$, entonces $[\gamma^r I]$ es un $*-$ideal algebraico de A y $\overline{[\gamma\mathcal{Y}]} = \mathcal{X}\overline{[\gamma^r I]}$. Además $\gamma|_{\overline{[\gamma\mathcal{Y}]}}{}^r = \gamma^r|_{\overline{[\gamma^r I]}}$.

Demostración. Llamemos α a γ^r. En cuanto a lo primero es evidente que $[\gamma\mathcal{Y}]$ es el espacio generado por la órbita de $\mathcal{Y}$. Para mostrar que $[\gamma\mathcal{Y}]$ es un submódulo basta con mostrar que cada $U_t := \gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y})$ es un submódulo cerrado. Como γ_t es lineal y $\gamma_{t^{-1}}(U_t) = \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}$ es un subespacio, U_t es un subespacio. Tomemos $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}$ y $a \in A$ y probemos que $\gamma_t(x)a \in U_t$, con lo cual mostraremos que $[\gamma\mathcal{Y}]$ es un submódulo. Si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de A_t entonces, como $\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}$ es un submódulo:

$$\gamma_t(x)a = \lim_i \gamma_t(x)e_i a = \gamma_t\left(\lim_i x\alpha_{t^{-1}}(e_i a)\right) \in \gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}).$$

Lo que acabamos de ver implica que $\overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$ es un submódulo cerrado que contiene a $\mathcal{Y}$ y, además, está contenido en todo submódulo cerrado e invariante que contiene a $\mathcal{Y}$. Para mostrar que $\overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$ es invariante tomemos $t \in G$ y veamos que $\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \overline{[\gamma\mathcal{Y}]}) \subset \overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$. Debido a que $\mathcal{X}_{t^{-1}} = \mathcal{X}A_{t^{-1}}$ y que $[\gamma\mathcal{Y}]$ es un submódulo, $\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap [\gamma\mathcal{Y}]$ es denso en $\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$. Como γ_t es una isometría basta mostrar que $\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap [\gamma\mathcal{Y}]) \subset \overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$.

Para cada $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap [\gamma\mathcal{Y}]$ existen $s_1, \ldots, s_n \in G$ y $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ de manera que $x_i \in \mathcal{X}_{s_i^{-1}} \cap \mathcal{Y}$ $(i = 1, \ldots, n)$ y $x = \sum_i \gamma_{s_i}(x_i)$. Si $\{e_j\}_j$ es una unidad aproximada de $A_{t^{-1}}$ entonces $\gamma_t(x) = \lim_j \gamma_t(xe_j) = \lim_j \sum_i \gamma_t\left(\gamma_{s_i}(x_i)e_j\right)$. Por otra parte, si $\{f_k\}_k$ es una unidad aproximada de A_{s_i} entonces

$$\gamma_t\left(\gamma_{s_i}(x_i)e_j\right) = \lim_k \gamma_t\left(\gamma_{s_i}(x_i)e_jf_k\right) = \lim_k \gamma_{ts_i}\left(x_i\alpha_{s_i{}^{-1}}(e_jf_k)\right).$$

Ahora bien, la ecuación anterior implica que $\gamma_t\left(\gamma_{s_i}(x_i)e_j\right)$ es el límite de una red en $\gamma_{ts_i}((\mathcal{X}_{s_i{}^{-1}} \cap \mathcal{Y})A_{s_i{}^{-1}t^{-1}}) \subset \gamma_{ts_i}(\mathcal{X}_{s_i{}^{-1}t^{-1}} \cap \mathcal{Y}) \subset \overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$ pues $\alpha_{s_i{}^{-1}}(e_jf_k) \in A_{s_i{}^{-1}t^{-1}}$, para todo k. Luego $\gamma_t(x) = \lim_j \sum_i \gamma_t\left(\gamma_{s_i}(x_i)e_j\right) \in \overline{[\gamma\mathcal{Y}]}$.

Con respecto a la segunda parte del enunciado, $[\alpha I]^* = [\alpha I]$ porque cada $\alpha_t(A_{t^{-1}} \cap I)$ es un ideal de A. Lo visto en los párrafos anteriores implica que $[\alpha I]$ es un submódulo (a derecha) de A, o sea $[\alpha I]A \subset [\alpha I]$. Además $A[\alpha I] = ([\alpha I]^*A^*)^* \subset [\alpha I]$, mostrando que $[\alpha I]$ es un $*-$ideal algebraico. Luego $\overline{[\alpha I]}$ es un ideal de A. Por otro lado, para cada $t \in G$ se tiene $\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}) = \gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}}(A_{t^{-1}} \cap I)) = \mathcal{X}_t\alpha_t(A_{t^{-1}} \cap I) = \mathcal{X}\alpha_t(A_{t^{-1}} \cap I)$. Luego el Teorema de Cohen-Hewitt implica que

$$\overline{[\gamma\mathcal{Y}]} = \overline{\sum_{t\in G}\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y})} = \overline{\sum_{t\in G}\mathcal{X}\alpha_t(A_{t^{-1}}I)} = \mathcal{X}\overline{\sum_{t\in G}\alpha_t(A_{t^{-1}} \cap I)} = \mathcal{X}\overline{[\alpha I]}.$$

Para terminar observamos que el Lema 1.53 implica que $\gamma|_{\overline{[\gamma\mathcal{Y}]}}{}^r = \gamma|_{\mathcal{X}\overline{[\alpha I]}}{}^r = \alpha|_{\overline{[\alpha I]}}$. $\square$

Corolario 1.80. *Si α es una acción parcial en C^*-álgebras de G en A e I es un ideal de A, entonces $\overline{[\alpha I]}$ es el menor ideal $\alpha-$invariante que contiene a I.*

Corolario 1.81. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ e I es un ideal de A entonces I es γ^r-invariante si y solamente si $\mathcal{X}I$ es $\gamma-$invariante (si y solamente si $\mathbb{K}(\mathcal{X}I)$ es γ^l-invariante).*

Demostración. Basta probar la equivalencia entre las primeras dos afirmaciones, ya que el resto se deduce utilizando la acción parcial adjunta de γ.

De los resultados anteriores deducimos que $\mathcal{X}I$ es $\gamma-$invariante sii $\mathcal{X}I = \overline{[\mathcal{X}I]}$ y que I es γ^r-invariante sii $I = \overline{[\gamma^r I]}$. Además dados ideales J y K de A se tiene que $J = K$ sii $\mathcal{X}J = \mathcal{X}K$, pues $\mathcal{X}$ es no degenerado. Luego I es γ^r-invariante sii $I = \overline{[\gamma^r I]}$ sii $\mathcal{X}I = \mathcal{X}\overline{[\gamma^r I]}$ sii $\mathcal{X}I = \overline{[\gamma\mathcal{X}I]}$ sii $\mathcal{X}I$ es $\gamma-$invariante. $\square$

Corolario 1.82. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y $(\delta, \iota, \mathcal{Z}_B, \mathcal{Y})$ es una globalización de γ entonces $(\delta^r, \iota^r, B, B_{\mathcal{Y}})$ es una globalización de γ^r y $(\delta^l, \iota^l, \mathbb{K}(\mathcal{Z}), \mathbb{K}(\mathcal{Y}))$ es una globalización de γ^l. Además todas estas globalizaciones son minimales si y solamente si alguna de ellas es minimal.*

Demostración. Llamemos I a $B_{\mathcal{Y}}$, luego $\mathcal{Z}I = \mathcal{Y}$ y el Lema 1.53 implica que $\delta^r|_I = \delta|_{\mathcal{Y}}{}^r$. Además la Proposición 1.52 implica que $(\delta^r, \iota^r, B, I)$ es una globalización de γ^r.

Supongamos que $(\delta, \iota, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ es minimal y tomemos una restricción admisible y global $\delta^r|_J \geq \delta^r|_I$. Luego J es δ^r-invariante y $\mathcal{Z}J$ es un ideal $\delta-$invariante que contiene a $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}I$. Como $(\delta, \iota, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ es minimal $\delta|_{\mathcal{Z}J} = \delta$, con lo cual $\mathcal{Z}J = \mathcal{Z}B$ y $\delta^r|_J = \delta^r$. Recíprocamente, si $(\delta^r, \iota^r, B, I)$ es minimal y $\delta|_{\mathcal{U}} \geq \delta|_{\mathcal{Y}}$ es una restricción admisible y global entonces $K := B_{\mathcal{U}}$ es un ideal δ^r-invariante, por lo cual $\delta^r|_K$ es una restricción admisible y global mayor o igual a $\delta^r|_I$. Luego $K = B$, lo que implica $\delta|_{\mathcal{U}} = \delta$.

El resto de se deduce de lo anterior considerando la acción adjunta $\widetilde{\gamma}$. $\square$

Corolario 1.83. *Sea α una acción parcial en C^*-álgebras de G en A y llamemos γ a α considerada como acción parcial en módulos de Hilbert. Luego α tiene una globalización si y solamente si γ la tiene.*

Demostración. Si α tiene una globalización entonces esta última es una globalización de γ. En cambio, si γ tiene una globalización entonces el Corolario anterior nos dice que $\gamma^r = \alpha$ tiene una globalización. $\square$

La relación entre las acciones parciales en C*-álgebras y en módulos de Hilbert puede explotarse aún más a través de la *linking algebra,* expresión que traducimos como "álgebra de enlace".

Fijemos una acción parcial en módulos de Hilbert γ de G en $\mathcal{X}_A$. El álgebra de enlace de $\mathcal{X}$, $\mathbb{L}(\mathcal{X})$, es $\mathbb{K}(\mathcal{X} \oplus A)$. Nos será más útil la descripción matricial de $\mathbb{L}(\mathcal{X})$. Sea

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}(\mathcal{X}) & \mathcal{X} \\ \widetilde{\mathcal{X}} & A \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix} : S \in \mathbb{K}(\mathcal{X}),\ x, y \in \mathcal{X},\ a \in A \right\},$$

equipado con la suma y producto por escalares punto a punto. El adjunto y la involución están dados por $\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} S^* & y \\ \widetilde{x} & a^* \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & z \\ \widetilde{w} & b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ST+|x\rangle\langle w| & Tx+za \\ \widetilde{y}T+a\widetilde{w} & \langle y,z\rangle+ab \end{pmatrix}$.

Existe un único $*$-homomorfismo $\psi\colon \begin{pmatrix} \mathbb{K}(\mathcal{X}) & \mathcal{X} \\ \widetilde{\mathcal{X}} & A \end{pmatrix} \to \mathbb{L}(\mathcal{X})$, $\psi\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sz+xb \\ \langle y,z\rangle+ab \end{pmatrix}$.

De hecho ψ es biyectivo y la C*-norma inducida por ψ en las matrices es equivalente a la norma del supremo [RW98, Lema 3.20 y Corolario 3.21].

Para cada $t \in G$ podemos pensar $\mathbb{L}(\mathcal{X}_t) \subset \mathbb{L}(\mathcal{X})$, de hecho $\mathbb{L}(\mathcal{X}_t)$ es un ideal. Además

$$\mathbb{L}(\gamma_t)\colon \mathbb{L}(\mathcal{X}_{t^{-1}}) \to \mathbb{L}(\mathcal{X}_t) \qquad \mathbb{L}(\gamma_t)\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^l_t(S) & \gamma_t(x) \\ \widetilde{\gamma_t(y)} & \gamma^r_t(a) \end{pmatrix},$$

es un $*-$homomorfismo.

Definición 1.84. La *acción parcial de enlace* de γ es $\mathbb{L}(\gamma) := (\{\mathbb{L}(\gamma_t)\}_{t\in G}, \{\mathbb{L}(\mathcal{X}_t)\}_{t\in G})$, tal como en [Aba03]. Ésta es una acción parcial en C*-álgebras.

La prueba del siguiente enunciado es directa y consta únicamente de verificaciones algebraicas utilizando el Corolario 1.40 y la Proposición 1.42.

Proposición 1.85. *Supongamos que γ, δ y ϱ son acciones parciales en módulos de Hilbert de G y que $\phi\colon \gamma \to \delta$ y $\psi\colon \delta \to \varrho$ son homomorfismos de acciones parciales en módulos de Hilbert. Luego existe un único homomorfismo de acciones parciales en C^*-álgebras $\mathbb{L}(\phi)\colon \mathbb{L}(\gamma) \to \mathbb{L}(\delta)$ tal que $\mathbb{L}(\phi)\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^l(S) & \phi(x) \\ \widetilde{\phi(y)} & \phi^r(a) \end{pmatrix}$.*

Además $\mathbb{L}(\psi)\circ\mathbb{L}(\phi) = \mathbb{L}(\psi\circ\phi)$ y $\mathbb{L}(\mathrm{id}_\gamma) = \mathrm{id}_{\mathbb{L}(\gamma)}$. Si ϕ es un isomorfismo entonces $\mathbb{L}(\phi)$ también y $\mathbb{L}(\phi)^{-1} = \mathbb{L}(\phi^{-1})$.

Como consecuencia obtenemos:

Proposición 1.86. *Si $\Omega := (\delta, \iota, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Y})$ es una globalización (minimal) de γ entonces $\mathbb{L}(\Omega) := (\mathbb{L}(\delta), \mathbb{L}(\iota), \mathbb{L}(\mathcal{Z}), \mathbb{L}(\mathcal{Y}))$ es una globalización (minimal) de $\mathbb{L}(\gamma)$.*

Demostración. Llamemos B al ideal de A tal que $\mathcal{Z}B = \mathcal{Y}$. Observemos que $\mathbb{L}(\mathcal{Y})$ es un ideal de $\mathbb{L}(\mathcal{Z})$ porque $\mathcal{Y}$ es un ideal de $\mathcal{Z}$. Probemos que $\alpha := \mathbb{L}(\delta)|_{\mathbb{L}(\mathcal{Y})}$ es igual a $\beta := \mathbb{L}(\delta|_{\mathcal{Y}})$. El rango de β_t, R_t, está formado por todas las matrices de la forma

$$M := \begin{pmatrix} \delta_t^l(S)T + |\delta_t(x)\rangle\langle v| & \delta_t^l(S)u + \delta_t(x)b \\ \widetilde{T^*\delta_t(y)} + \widetilde{v\delta_t^r(a^*)} & \langle \delta_t(y), u\rangle + \delta_t^r(a)b \end{pmatrix},$$

con $S, T \in \mathbb{K}(\mathcal{Y}),\ x, y, u, v \in \mathcal{Y},\ a, b \in B$. Como δ^l es una globalización de γ^l tenemos $\{\delta_t^l(S)T\colon S, t \in \mathbb{K}(\mathcal{Y})\} = \mathbb{K}(\mathcal{Y})_t$. Por otro lado podemos encontrar $z, w \in \mathcal{Y}$ y $c, d \in B$ tales que $x = zc$ y $v = wd$. Luego $|\delta_t(x)\rangle\langle v| = |\delta_t(zc\delta_{t^{-1}}^l(d))\rangle\langle w|$ y debido a que δ^l es una globalización de γ^l se tiene $zc\delta_{t^{-1}}^l(d) \in \mathcal{Y}_{t^{-1}}$. Por lo tanto $|\delta_t(x)\rangle\langle v| \in \mathbb{K}(\mathcal{Y})_t$. De estas consideraciones concluimos que los coeficientes de la primer fila y primer columna de M pertenecen a $\mathbb{K}(\mathcal{Y})_t$ y que todo elemento de $\mathbb{K}(\mathcal{Y})_t$ se obtiene de esta manera. Con argumentos análogos a lo anterior deducimos que $R_t = \mathbb{L}(\mathcal{Y}_t)$; de lo que se desprende que β_t y α_t tienen el mismo dominio y codominio. Por otro lado, si $\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{L}(\mathcal{Y}_t)$ entonces $\alpha_t\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_t^l(S) & \delta_t(x) \\ \widetilde{\delta_t(y)} & \delta_t^r(a) \end{pmatrix} = \beta_t\begin{pmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{pmatrix}$. Lo que implica $\alpha = \beta$.

Puesto que $\iota\colon \gamma \to \delta|_{\mathcal{Y}}$ es un isomorfismo tenemos que $\mathbb{L}(\iota)\colon \mathbb{L}(\gamma) \to \mathbb{L}(\delta|_{\mathcal{Y}}) = \mathbb{L}(\delta)|_{\mathbb{L}(\mathcal{Y})}$ es un isomorfismo, probando que $\mathbb{L}(\Omega)$ es una globalización de $\mathbb{L}(\gamma)$. En caso que Ω sea minimal el Corolario 1.82 implica que

$$\overline{[\mathbb{L}(\delta)\mathbb{L}(\mathcal{Y})]} = \overline{\operatorname{span}}\left\{\begin{pmatrix} \delta_t^l(S) & \delta_t(x) \\ \widetilde{\delta_t(y)} & \delta_t^r(a) \end{pmatrix} : S, T \in \mathbb{K}(\mathcal{Y})\, x, y, u, v \in \mathcal{Y}\, a, b \in B\right\} = \mathbb{L}(\mathcal{Z}),$$

con lo cual $\mathbb{L}(\Omega)$ es minimal. $\square$

Teorema 1.87. *Toda globalización minimal de una acción parcial en módulos de Hilbert es universal.*

Demostración. Supongamos que $\Omega := (\delta, \iota, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ y $\Xi := (\varrho, \kappa, \mathcal{V}, \mathcal{U})$ son globalizaciones de la acción parcial en módulos de Hilbert γ, de G en $\mathcal{X}_A$, siendo Ω minimal.

Sabemos que $\mathbb{L}(\Omega)$ es minimal para $\mathbb{L}(\gamma)$ y que $\mathbb{L}(\Xi)$ es una globalización de $\mathbb{L}(\gamma)$. Por el Teorema 1.77 existe un único morfismo $\widehat{\mathbb{L}(\kappa)} \colon \mathbb{L}(\delta) \to \mathbb{L}(\varrho)$ tal que $\widehat{\mathbb{L}(\kappa)} \circ \mathbb{L}(\iota) = \mathbb{L}(\kappa)$. Definamos $P_{\mathcal{V}} \colon \mathbb{L}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$ e $\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}} \colon \mathcal{Z} \to \mathbb{L}(\mathcal{Z})$ como $P_{\mathcal{Z}} \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ \widetilde{y} & a \end{smallmatrix}\right) = x$ y $\mathrm{inc}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Con ellos definimos $\widehat{\kappa} := P_{\mathcal{V}} \circ \widehat{\mathbb{L}(\kappa)} \circ \mathrm{inc}_{\mathcal{Z}} \colon \mathcal{Z} \to \mathcal{V}$. Afirmamos que $\widehat{\iota}$ es el único morfismo π de δ en ϱ tal que $\pi \circ \iota = \kappa$.

La ecuación $\pi \circ \iota = \kappa$ determina el valor de π en $\mathcal{Y}$. Como π es lineal y un morfismo de acciones parciales en conjuntos también queda determinado el valor de π en $[\delta\mathcal{Y}]$. Además π es continua y por lo tanto queda determinado el valor de π en $\overline{[\delta\mathcal{Y}]} = \mathcal{V}$, lo que muestra la unicidad de π.

Observemos que $\widehat{\kappa}$ es un morfismo lineal de acciones parciales en conjuntos porque es la composición de morfismos con tales características. Por otra parte, si dados $x, y, z \in \mathcal{Y}$ definimos $u := \widehat{\kappa}(x)\langle \widehat{\kappa}(y), \widehat{\kappa}(z)\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa}(y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa}(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbb{L}(\kappa)}\,(\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}}(x))\,\widehat{\mathbb{L}(\kappa)}\,(\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}}(y))^*\,\widehat{\mathbb{L}(\kappa)}\,(\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}}(z)) \\ &= \widehat{\mathbb{L}(\kappa)}\,[\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}}(x)\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}}(y)^*\mathrm{inc}_{\mathcal{Z}}(z)] = \widehat{\mathbb{L}(\kappa)} \begin{pmatrix} 0 & x\langle y,z\rangle \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa}(x\langle y,z\rangle) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

con lo cual mostramos que $\widehat{\kappa}(x)\langle \widehat{\kappa}(y), \widehat{\kappa}(z)\rangle = \widehat{\kappa}(x\langle y, z\rangle)$. $\square$

El recíproco de la Proposición 1.86 se sigue del siguiente resultado, que utilizaremos más adelante en otro contexto.

Teorema 1.88. *Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y que $P \in \mathbb{B}(\gamma)$ es una proyección. Luego $\mathcal{Y} := P\mathcal{X}$ es un submódulo $\gamma-$invariante y la restricción $\gamma|_{\mathcal{Y}}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert. Además, si γ tiene una globalización entonces $\gamma|_{\mathcal{Y}}$ también la tiene.*

Demostración. La imagen de P, $\mathcal{Y}$, es un subespacio cerrado porque P es una proyección y es un submódulo porque $\mathcal{Y}A = P(\mathcal{X})A = P(\mathcal{X}A) = \mathcal{Y}$. También es $\gamma-$invariante porque para todo $t \in G$ $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_t = P(\mathcal{X}_t)$ y, por lo tanto, $\gamma_t(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_{t^{-1}}) = \gamma_t(P(\mathcal{X}_{t^{-1}})) = P(\gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}})) = P(\mathcal{X}_t) = \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_t$.

La restricción $\delta := \gamma|_{\mathcal{Y}}$ es una acción parcial continua porque es la restricción de una acción parcial continua. Además cada δ_t es la restricción de un homomorfismo de módulos de Hilbert, por lo que también es un homomorfismo de módulos de Hilbert. Finalmente $\{\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_t\}_{t \in G}$ es una familia continua porque $\{P \circ f \colon f \in C_c^{\gamma}(G, \mathcal{X})\}$ es una familia continua $\{\mathcal{Y}\cap\mathcal{X}_t\}_{t\in G}-$secciones continuas tal que para todo $t\in G$ $S(t)=\mathcal{Y}\cap\mathcal{X}_t$. Con esto mostramos que δ es una acción parcial en módulos de Hilbert.

Supongamos ahora que γ tiene una globalización $(\delta,\iota,\mathcal{U}_B,\mathcal{Z})$. La conjugación $\pi\colon \mathbb{B}(\gamma)\to\mathbb{B}(\delta|_{\mathcal{Z}})$, $T\mapsto \iota\circ T\circ\iota^{-1}$, es un isomorfismo de C*-álgebras por lo que $\pi(P)$ es una proyección. Por lo visto antes en esta prueba $\delta|_{\mathcal{Z}}|_{\pi(P)\mathcal{Z}}=\delta|_{\pi(P)\mathcal{Z}}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert y $\iota|_{\mathcal{Y}}\colon \gamma|_{P\mathcal{X}}\to\delta|_{\pi(P)\mathcal{Z}}$ es un isomorfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert. Como la propiedad de tener una globalización se preserva por isomorfismos, $\gamma|_{P\mathcal{X}}$ tiene una globalización si y solamente si $\delta|_{\pi(P)\mathcal{Z}}$ la tiene; con lo cual podemos pensar que $\gamma=\delta|_{\mathcal{Z}}$ y $\mathcal{X}=\mathcal{Z}$, lo que haremos hasta el final de la prueba.

Sean $\mathcal{V}:=\overline{[P\mathcal{Y}]}$, $I:=\overline{\operatorname{span}}\,\langle\mathcal{Y},\mathcal{Y}\rangle$, $C:=\overline{[\delta^r I]}$ y $\sigma:=\delta|_{\mathcal{V}}$. La prueba habrá concluido una vez que demostremos que $\mathcal{V}$ es un $C-$módulo de Hilbert (con la estructura heredada de $\mathcal{U}$), que $\mathcal{V}I=\mathcal{Y}$, que σ es una acción parcial en módulos de Hilbert y que $\sigma|_{\mathcal{Y}}=\gamma$.

Una de las claves es mostrar que $\delta_s(\mathcal{Y})\langle\mathcal{Y},\delta_t(\mathcal{Y})\rangle\subset\mathcal{Y}$, para todo $s,t\in G$. Notemos que $\delta_s(\mathcal{Y})\langle\mathcal{Y},\delta_t(\mathcal{Y})\rangle\subset\delta_s(\mathcal{X})\langle\mathcal{X},\delta_t(\mathcal{X})\rangle\subset\mathcal{X}_s\cap\mathcal{X}_t$. Por lo tanto, dados $x,y,z\in\mathcal{Y}$, si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $A_s\cap A_t$ entonces

$$\begin{aligned}\delta_s(x)\langle y,\delta_t(z)\rangle &= \lim_i \delta_s(x)\langle y,\delta_t(z)\rangle e_i = \lim_i\lim_j \delta_s(x)e_j\langle y,\delta_t(z)\rangle e_i\\ &= \lim_i\lim_j \gamma_s(Px\gamma^r_{s^{-1}}(e_j\langle y,\delta_t(z)\rangle e_i))\\ &= \lim_i\lim_j P\gamma_s(x\gamma^r_{s^{-1}}(e_j\langle y,\delta_t(z)\rangle e_i))\in P\mathcal{X}=\mathcal{Y};\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\gamma=\delta|_{\mathcal{X}}$ y que $\gamma^r=\delta^r|_A$.

La otra clave es mostrar que $\langle\mathcal{Y},\delta_t(\mathcal{Y})\rangle\subset I$, para todo $t\in G$. Esto último se deduce de que para todo $x,y\in\mathcal{Y}$, $t\in G$ y unidad aproximada de A_t $\{e_i\}_i$ vale que

$$\langle x,\delta_t(y)\rangle=\lim_i\langle x,\delta_t(y)\rangle e_i=\lim_i\langle Px,\delta_t(y)e_i\rangle=\lim_i\langle Px,P(\delta_t(y)e_i)\rangle\in I.$$

Para mostrar que $\overline{\operatorname{span}}\,\langle\mathcal{V},\mathcal{V}\rangle=C$ observemos que

$$\overline{\operatorname{span}}\,\langle\mathcal{V},\mathcal{V}\rangle=\overline{\operatorname{span}}\,\{\delta^r_s(\langle\mathcal{Y},\delta_t(\mathcal{Y})\rangle)\colon s,t\in G\}=\overline{\operatorname{span}}\,\{\delta^r_s(\langle\mathcal{Y},\mathcal{Y}\rangle)\colon s\in G\}=\overline{[\delta^r I]}=C.$$

Además $\mathcal{V}C\subset\mathcal{V}$ porque $\mathcal{V}C=\overline{\operatorname{span}}\,\{\delta_r(\mathcal{Y})\langle\delta_s(\mathcal{Y}),\delta_t(\mathcal{Y})\rangle\colon r,s,t\in G\}$ y para cada $r,s,t\in G$ se tiene que $\delta_r(\mathcal{Y})\langle\delta_s(\mathcal{Y}),\delta_t(\mathcal{Y})\rangle=\delta^r_s(\delta_{s^{-1}r}(\mathcal{X})\langle\mathcal{Y},\delta_{s^{-1}t}(\mathcal{Y})\rangle)\subset\delta^r_s(\mathcal{Y})\subset\mathcal{V}$. Con esto mostramos que $\mathcal{V}$ es un $C-$módulo de Hilbert pleno. Por otra parte $\mathcal{V}I=\mathcal{Y}$ porque $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}I\subset\mathcal{V}I$ y $\mathcal{V}I=\overline{\operatorname{span}}\,\{\delta_s(\mathcal{Y})\langle\mathcal{Y},\mathcal{Y}\rangle\colon s\in G\}\subset\mathcal{Y}$; donde lo último se deduce de que para cada $s\in G$, $x,y,z\in\mathcal{Y}$ y unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de A_s :

$\delta_s(x)\langle y,z\rangle = \text{lím}_i\, \delta_s(x)\langle y,z\rangle e_i = \text{lím}_i\, P\gamma_s(x\gamma^r_{s^{-1}}(\langle y,z\rangle e_i)) \in \mathcal{Y}$. Hasta aquí sabemos que $\mathcal{Y}$ es un submódulo inducido por ideales del $C-$módulo de Hilbert pleno $\mathcal{V}$.

Para mostrar que σ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{V}$ observemos que es una acción parcial continua y global porque $\mathcal{V}$ es $\delta-$invariante y δ es una acción parcial continua. Por otra parte cada σ_t es la un homomorfismo de módulos de Hilbert por ser la restricción de uno de tales homomorfismos. Finalmente es evidente que $\sigma|_{\mathcal{Y}} = \delta|_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{Y}} = \delta|_{\mathcal{Y}} = \gamma$, o sea que γ es una restricción admisible de una acción global en módulos de Hilbert; lo que implica trivialmente que γ tiene una globalización. $\square$

Corolario 1.89. *Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y que $p \in \mathbb{B}(\gamma^l)$ y $q \in \mathbb{B}(\gamma^r)$ son proyecciones. Luego $p\mathcal{X}q$ es un $\overline{\text{span}}\, qApAq-$módulo de Hilbert pleno (con la estructura heredada de $\mathcal{X}$); también es $\gamma-$invariante y $\gamma|_{p\mathcal{X}q}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert. En caso que γ tenga una globalización $\gamma|_{p\mathcal{X}q}$ también la tiene.*

Demostración. Sea $\widetilde{\gamma}$ la acción parcial conjugada de γ. Luego $q \in \mathbb{B}(\gamma^r) = \mathbb{B}(\widetilde{\gamma}^l) = \mathbb{B}(\widetilde{\gamma})$ y, por el Teorema anterior, $q\widetilde{\mathcal{X}}$ es un módulo de Hilbert $\widetilde{\gamma}$ invariante. Además $\widetilde{\gamma}|_{q\widetilde{\mathcal{X}}}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert que tiene una globalización siempre que $\widetilde{\gamma}$ la tiene. Traduciendo esto en términos de γ hemos mostrado que $\mathcal{X}q$ es un $qAq-$módulo de Hilbert $\gamma-$invariante y $\gamma|_{\mathcal{X}q}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert, que tiene una globalización siempre que γ la tiene.

Sea $\pi\colon \mathbb{B}(\mathcal{X}) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}q)$ el $*-$homomorfismo definido por $\pi(T)x = Tx$. Tenemos $\pi(p) \in \mathbb{B}(\gamma|_{\mathcal{X}q})$ porque $\pi(\mathbb{B}(\gamma)) \subset \mathbb{B}(\gamma|_{\mathcal{X}q})$; además $\pi(p)$ es una proyección. Utilizando el Teorema anterior deducimos que $p\mathcal{X}q = \pi(p)\mathcal{X}q$ es un $\overline{\text{span}}\, qApAq-$módulo de Hilbert $\gamma|_{\mathcal{X}q}-$invariante y $\gamma|_{p\mathcal{X}q} = \gamma|_{\mathcal{X}q}|_{p\mathcal{X}q}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert, que tiene una globalización siempre que $\gamma|_{\mathcal{X}q}$ la tiene. Como $\mathcal{X}q$ es γ invariante, $p\mathcal{X}q \subset \mathcal{X}q$ y $p\mathcal{X}q$ es $\gamma|_{\mathcal{X}q}-$invariante, $p\mathcal{X}q$ es $\gamma-$invariante. Si γ es globalizable entonces $\gamma|_{\mathcal{X}q}$ también lo es y, por lo tanto, $\gamma|_{p\mathcal{X}q}$ es globalizable. $\square$

Corolario 1.90. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert entonces γ tiene una globalización si y solamente si $\mathbb{L}(\gamma)$ tiene una globalización (como acción parcial en C*-álgebras).*

Demostración. El Corolario 1.83 implica que $\mathbb{L}(\gamma)$ tiene una globalización, considerada como acción parcial en módulos de Hilbert, si y solamente si la tiene como acción parcial en C*-álgebras. Por lo tanto el directo se deduce de la Proposición 1.86.

Para mostrar el recíproco digamos que γ es una acción parcial de G en $\mathcal{X}_A$. Sean $p, q \in \mathbb{B}(\mathbb{L}(\mathcal{X}))$ las proyecciones $p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $q = 1 - p$. Sin mayor dificultad puede mostrarse que $p, q \in \mathbb{B}(\mathbb{L}(\gamma))$ y que $\mathbb{L}(\gamma)^r = \mathbb{L}(\gamma)^l = \mathbb{L}(\gamma)$; con lo cual $\mathbb{L}(\gamma)|_{p\mathbb{L}(\mathcal{X})q}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert que tiene una globalización (asumimos que $\mathbb{L}(\gamma)$ la tiene).

Notemos que $p\mathbb{L}(\mathcal{X})q = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathcal{X}\}$ y definamos $\phi\colon \mathcal{X} \to p\mathbb{L}(\mathcal{X})q$ como $\phi(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es prácticamente inmediato que ϕ es un isomorfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert entre γ y $\mathbb{L}(\gamma)|_{p\mathbb{L}(\mathcal{X})q}$, luego γ tiene una globalización. $\square$

Capítulo 2

Equivalencia de Morita de Fibrados de Fell

La teoría de fibrados de Fell desarrollada en [FD88], donde estos fibrados son llamados *C*-algebraic bundles*, es la herramienta básica para trabajar con productos cruzados por acciones acciones parciales[1]. La conexión entre ambos objetos es la construcción de Exel [Exe97] de un fibrado de Fell a partir de cada acción parcial en C*-álgebras. En general, como aquí, $\mathcal{B}\alpha$ representa el fibrado asociado a la acción parcial α. El producto cruzado por α es la C*-álgebra seccional (*cross sectional C*-algebra* [FD88, VIII 17.2]) de $\mathcal{B}\alpha$, $C^*(\mathcal{B}\alpha)$ y el producto cruzado reducido es $C^*_r(\mathcal{B}\alpha)$ [EN02].

Parte de los contenidos de este capítulo están motivados por el siguiente Teorema, que se encuentran en [AMP09] y [Aba03] (para las versiones plenas y reducidas respectivamente).

Teorema 2.1. *Si α y β son acciones parciales (del mismo grupo) equivalentes Morita entonces $C^*(\mathcal{B}\alpha)$ es Morita equivalente a $C^*(\mathcal{B}\beta)$ y $C^*_r(\mathcal{B}\alpha)$ lo es a $C^*_r(\mathcal{B}\beta)$.*

La idea es desarrollar una noción de “equivalencia de Morita de fibrados de Fell” de manera que las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(I) Si α y β son acciones parciales (del mismo grupo) equivalentes Morita entonces $\mathcal{B}\alpha$ es equivalente Morita a $\mathcal{B}\beta$.

(II) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fibrados de Fell (sobre el mismo grupo) equivalentes Morita entonces $C^*(\mathcal{A})$ es equivalente Morita a $C^*(\mathcal{B})$ y $C^*_r(\mathcal{A})$ lo es a $C^*_r(\mathcal{B})$.

[1] Para los grupos discretos la teoría es considerablemente menos técnica y puede explicarse sin necesidad de recurrir al texto citado.

La estrategia para esto es pensar a los fibrados de Fell como C*-álgebras y preguntarse qué deben ser los bimódulos, los operadores compactos, la *linking algebra*, etc. Parece claro que la equivalencia entre fibrados estará dada por un fibrado de bimódulos con algo de estructura extra, objetos que llamaremos fibrados de equivalencia. Lo esencial aquí es poder construir uno de estos fibrados a partir de toda acción parcial en módulos de Hilbert, lo que nos dará (I). Con cada fibrado de equivalencia construiremos un fibrado de Fell que será una especie de *linking algebra* y llamaremos fibrado de enlace. En la segunda etapa usaremos el fibrado de enlace para deducir (II) a partir del Teorema 1.1 de [AMP09], cuya prueba completaremos.

Este capítulo también tiene otras partes, que presentamos a continuación. En la primera recordaremos cómo construir un fibrado de Fell a partir de una acción parcial en C*-álgebras, qué son las C*-álgebras seccionales plenas y reducidas así como la conexión entre las envolventes de Morita de acciones parciales y los fibrados de Fell. También mostraremos algunos resultados relativos a subfibrados de fibrados de Fell. En la segunda parte desarrollaremos una teoría de isomorfismos de fibrados de Fell que sólo tiene en cuenta a sus C*-álgebras seccionales y algunos ideales de ellas, luego relacionaremos esto con fibrados de Fell construidos a partir de acciones parciales que conmutan. En la parte final desarrollaremos la teoría de equivalencia de Morita de fibrados de Fell. En Capítulos siguientes demostraremos los Teoremas de Imprimitividad para acciones parciales combinando los contenidos de las dos últimas partes.

Cada vez que utilicemos algún resultado o definición de [FD88] indicaremos el capítulo y la sección explícitamente. Por ejemplo la definición de fibrado de Banach se encuentra en [FD88, II 13.4] y la de *fibrado de Fell* (*C*-algebraic bundle*) en [FD88, VIII 16.2]. A su vez esta última definición depende de [FD88, VIII 2.2 y 3.1]. La *C*-álgebra seccional (universal)* del fibrado de Fell $\mathcal{B}$ es $C^*(\mathcal{B})$ [FD88, VIII 17.2]. Utilizaremos la noción de Exel y Ng de *C*-álgebra seccional reducida* $C^*_r(\mathcal{B})$ [EN02] y los resultados de [Aba03] al respecto.

2.1. Productos cruzados y fibrados de Fell

Tomemos una acción parcial en C*-álgebras, α, de G en A. El fibrado $\mathcal{B}\alpha$ (Definición 1.30) es de Banach, de hecho es un fibrado de Fell [Exe97] con las operaciones

$$(a\delta_s)(b\delta_t) := \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a)b)\delta_{st} \quad \text{y} \quad (a\delta_s)^* := \alpha_{s^{-1}}(a^*)\delta_{s^{-1}}.$$

El *producto cruzado (pleno o universal)* $A \rtimes_\alpha G$ es $A \rtimes_\alpha G := C^*(\mathcal{B}\alpha)$ y el *reducido* $A \rtimes_{r,\alpha} G := C^*_r(\mathcal{B}\alpha)$.

Bajo ciertas condiciones todo fibrado de Fell $\mathcal{B}$ puede construirse como un $\mathcal{B}\alpha$ (ver [Exe14, Teorema 27.11] y [Seh14]) o como el fibrado de Fell asociado a una *twisted partial action* [Exe97]. Por este motivo pasamos a trabajar con fibrados de Fell en general y no sólo con fibrados provenientes de acciones parciales.

Asumamos que $\mathcal{B}$ es un fibrado de Fell sobre G, como siempre G es HLC. A diferencia de [EN02, FD88] denotaremos $C_c(\mathcal{B})$ al conjunto de las secciones continuas de $\mathcal{B}$ con soporte compacto. El Lema 2.1 de ese artículo establece que $C_c(\mathcal{B})$ es un $\mathcal{B}_e-$módulo con las operaciones $fa(t) := f(t)a$ y $\langle \mid \rangle \colon C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}_e$ $\langle f|g\rangle := \int_G f(t)^* g(t)\, dt$. Su completación respecto de la norma $\|f\| := \|\langle f|f\rangle\|^{1/2}$ es un $\mathcal{B}_e-$módulo de Hilbert que denotaremos $L^2(\mathcal{B})$. Es un hecho conocido que $L^2(\mathcal{B})$ es pleno.

En [Aba03] se demuestra que para cada $t \in G$ y $a \in \mathcal{B}_t$ existe un único operador $\Lambda_a \in \mathbb{B}(L^2(\mathcal{B}))$ de manera que $\Lambda_a f(r) = af(t^{-1}r)$ $\forall$ $f \in C_c(\mathcal{B})$ y $r \in G$. También se demuestra que $\Lambda\colon \mathcal{B} \to \mathbb{B}(L^2(\mathcal{B}))$ es una $*-$representación integrable. Su forma integrada [FD88, VIII 11], $\widetilde{\Lambda}\colon C^*(\mathcal{B}) \to \mathbb{B}(L^2(\mathcal{B}))$, es una representación. La imagen de $\widetilde{\Lambda}$ es, por definición, $C^*_r(\mathcal{B})$. La *representación regular* de $\mathcal{B}$ es Λ y la de $C^*(\mathcal{B})$ es $\widetilde{\Lambda}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *promediable*[2] si la representación regular de $C^*(\mathcal{B})$ es fiel. Denotaremos $N_{\mathcal{B}}$ al núcleo de $\widetilde{\Lambda}$, por lo que $C^*_r(\mathcal{B})$ es isomorfa a $C^*(\mathcal{B})/N_{\mathcal{B}}$ y $\mathcal{B}$ es promediable sii $N_{\mathcal{B}} = \{0\}$.

La acción parcial en C*-álgebras α es *promediable* si $\mathcal{B}\alpha$ es promediable. Por otra parte una acción parcial HLC σ es *promediable* si $\Theta(\sigma)$ lo es.

Lema 2.2. *Para toda $f, g \in C_c(\mathcal{B})$ se cumple que $\widetilde{\Lambda}_f(g) = f * g$ (la convolución, que es el producto de $C^*(\mathcal{B})$). Además $\widetilde{\Lambda}$ es inyectiva en $L^1(\mathcal{B})$.*

Demostración. La igualdad $\widetilde{\Lambda}_f(g) = f*g$ es parte de la tesis del Teorema 3.1 de [Aba03]. En cuanto a la segunda afirmación comenzamos por observar que dadas $f, g \in C_c(\mathcal{B})$ se tiene $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathcal{B})} = \int_G f(t)^* g(t)\, dt = \int_G \Delta(t)^{-1} f(t^{-1})^* g(t^{-1})\, dt = f^* * g(e)$.

Tomemos $f \in L^1(\mathcal{B})$ tal que $\widetilde{\Lambda}_f = 0$ y una sucesión $\{f_n\}_n \subset C_c(\mathcal{B})$ que converge a f en $L^1(\mathcal{B})$. Dadas $g, h \in C_c(\mathcal{B})$ la sucesión $\{g^* * f_n * h\}_n \subset C_c(\mathcal{B})$ converge uniformemente en compactos [FD88, VIII 14.3 y 14.4]. Llamemos $g^* * f * h$ a su límite puntual (que pensamos como un elemento de $L^1(\mathcal{B})$). Como $g^* * f_n * h(e) = \langle g, \widetilde{\Lambda}_{f_n} h\rangle \to \langle g, \widetilde{\Lambda}_f h\rangle = 0$, tenemos $(g^* * f * h)(e) = 0$. De la prueba de [FD88, VIII 16.4] deducimos que $f = 0$. □

De ahora en más pensaremos a $C_c(\mathcal{B})$ y a $L^1(\mathcal{B})$ como $*-$subálgebras densas de $C^*(\mathcal{B})$ y de $C^*_r(\mathcal{B})$.

En el resto de esta sección estableceremos algunos resultados relacionados a subfibrados de Fell que usaremos en lo que queda de la tesis.

[2] Traducción del inglés de *amenable*.

Un *subfibrado de Fell* del fibrado de Fell $\mathcal{B}$ es un subfibrado de Banach $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$. Con la estructura heredada de $\mathcal{B}$ $\mathcal{A}$ es un fibrado de Fell. Diremos que $\mathcal{I}$ es un *ideal* de $\mathcal{B}$ si es un subfibrado de Fell y $\mathcal{I}\mathcal{B} \subset \mathcal{I}$ (equivalentemente $\mathcal{B}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$). En caso que $\mathcal{A}$ sea un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ diremos que $\mathcal{A}$ es un *subfibrado hereditario*.

El siguiente enunciado es la Proposición 3.2 de [Aba03] junto con algunas consecuencias inmediatas (ver también el Corolario 3.1 de ese artículo).

Proposición 2.3. *Si $\mathcal{A}$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$ entonces $C_r^*(\mathcal{A})$ es isomorfa a la clausura de $L^1(\mathcal{A})$ en $C_r^*(\mathcal{B})$. En caso que $\mathcal{A}$ sea hereditario (un ideal) $C_r^*(\mathcal{A})$ es hereditaria (un ideal) de $C_r^*(\mathcal{B})$.*

Demostración. Como lo mencionamos antes la primer parte de la prueba es exactamente la Proposición antes citada. Si $\mathcal{A}$ es hereditario en $\mathcal{B}$ de la fórmula del producto de $C_c(\mathcal{B})$ se deduce inmediatamente que $C_c(\mathcal{A})C_c(\mathcal{B})C_c(\mathcal{A}) \subset C_c(\mathcal{A})$. Dado que $C_c(\mathcal{B})$ $(C_c(\mathcal{A}))$ es denso en $C_r^*(\mathcal{B})$ $(C_r^*(\mathcal{A}))$ se tiene $C_r^*(\mathcal{A})C_r^*(\mathcal{B})C_r^*(\mathcal{A}) \subset C_r^*(\mathcal{B})$, es decir que $C_r^*(\mathcal{A})$ es hereditaria en $C_r^*(\mathcal{B})$.

En caso que $\mathcal{A}$ sea un ideal de $\mathcal{B}$ se tiene $C_c(\mathcal{I})C_c(\mathcal{B}) \subset C_c(\mathcal{I})$ y razonando como antes se deduce que $C_r^*(\mathcal{I})$ es un ideal de $C_r^*(\mathcal{B})$. □

La versión universal de la Proposición anterior se deduce de la Proposición 3.34 de [Aba99]. Para la conveniencia del lector reproducimos aquí la prueba.

Proposición 2.4. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal del fibrado de Fell $\mathcal{B}$ entonces $C^*(\mathcal{I})$ es isomorfa a la clausura de $L^1(\mathcal{I})$ en $C^*(\mathcal{B})$ y $C^*(\mathcal{I}) \cap N_{\mathcal{B}} = N_{\mathcal{I}}$.*

Demostración. Durante esta prueba llamaremos G al grupo de base de $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{I}$. Comencemos observando que $L^1(\mathcal{I})$ es isomorfa a la clausura de $C_c(\mathcal{I}) \subset C_c(\mathcal{B})$ en $L^1(\mathcal{B})$, que es un ideal de $L^1(\mathcal{B})$. Entonces $L^1(\mathcal{I})$ es un $*-$ideal (cerrado) de $L^1(\mathcal{B})$.

Sean J la clausura de $L^1(\mathcal{I})$ en $C^*(\mathcal{B})$ y $\iota\colon L^1(\mathcal{I}) \to J$ la restricción a $L^1(\mathcal{I})$ de la inclusión canónica $L^1(\mathcal{B}) \subset C^*(\mathcal{B})$. Tomemos una $*-$representación fiel y no degenerada $\pi\colon C^*(\mathcal{I}) \to B(X)$. De acuerdo con [FD88, VI 19.11] la restricción $\pi|_{L^1(\mathcal{I})}$ admite una única extensión $\rho\colon L^1(\mathcal{B}) \to B(X)$. Como $C^*(\mathcal{B})$ es la C*-álgebra envolvente de $L^1(\mathcal{B})$ podemos pensar que ρ es una $*-$representación de $C^*(\mathcal{B})$. Luego $\rho|_J \circ \iota = \pi$, lo que muestra que J es (isomorfa a) la C*-álgebra envolvente de $L^1(\mathcal{I})$. En otras palabras $C^*(\mathcal{I})$ es isomorfa a J. Que J es un ideal de $C^*(\mathcal{B})$ se deduce de que $L^1(\mathcal{I})$ es un $*-$ideal de $L^1(\mathcal{B})$ y de que $L^1(\mathcal{B})$ es denso en $C^*(\mathcal{B})$.

La igualdad $N_{\mathcal{I}} = C^*(\mathcal{I}) \cap N_{\mathcal{B}}$ se deduce de la Proposición 2.3. □

Para demostrar lo anterior para subfibrados hereditarios en lugar de ideales necesitamos algunas herramientas extras.

Lema 2.5. *Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell y $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ un subfibrado de Banach de manera que $\mathcal{E}\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. Definamos*

$$D_{\mathcal{E}} := \{b \in \mathcal{B}_e \colon \|b\| < 1,\ \exists\ c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{E} \text{ tales que } b = {c_1}^* c_1 + \cdots + {c_n}^* c_n\}.$$

Luego $D_{\mathcal{E}}$ es un subconjunto dirigido de $\mathcal{B}_e^+$ y $\operatorname{span}(\mathcal{B}_e \cap (\mathcal{E}^*\mathcal{E}))$ es denso en $\mathcal{B}_e$ si y solamente si $\{\lambda\}_{\lambda \in D_{\mathcal{E}}}$ es una unidad aproximada de $\mathcal{B}$.

Demostración. Para mostrar que es un conjunto dirigido tomemos $a, b \in D_{\mathcal{E}}$ para mostrar que existe $c \in D_{\mathcal{E}}$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$. Pensemos a cada fibra $\mathcal{E}_t$ como un $\mathcal{B}_e-$módulo de Hilbert, lo que nos permite pensar a $\mathcal{E}_t$ como un módulo de Hilbert sobre la unitización de $\mathcal{B}_e$ (en caso que $\mathcal{B}_e$ no tenga unidad). Supongamos que $a = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^* c_i$ y $b = \sum_{i=1}^{n} {d_i}^* d_i$. Luego

$$c' := a(1-a)^{-1} + b(1-b)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} (c_i(1-a)^{-1/2})^* c_i(1-a)^{-1/2} + (d_i(1-b)^{-1/2})^* d_i(1-b)^{-1/2}$$

y

$$\begin{aligned} c := c'(1+c')^{-1} = &\sum_{i=1}^{n} (c_i(1-a)^{-1/2}(1+c')^{-1/2})^* c_i(1-a)^{-1/2}(1+c')^{-1/2} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (d_i(1-b)^{-1/2}(1+c')^{-1/2})^* d_i(1-b)^{-1/2}(1+c')^{-1/2}. \end{aligned}$$

Razonando como en [Mur90, Pág. 78] deducimos que $\|c\| < 1$ y que $a \leq c$ y $b \leq c$. Además las ecuaciones de arriba implican que $c \in D_{\mathcal{E}}$.

Asumamos que $\mathcal{E}_0 := \operatorname{span}(\mathcal{B}_e \cap (\mathcal{E}^*\mathcal{E}))$ es denso en $\mathcal{B}_e$. Basta mostrar que para todo $b \in \mathcal{B}_e^+$ se tiene que $\|b - b\lambda\| \to 0$ (porque toda unidad aproximada de $\mathcal{B}_e$ es una unidad aproximada de $\mathcal{B}$). De la prueba del Teorema 3.1.1 de [Mur90] se deduce que $\lambda \mapsto \|b - b\lambda\|$ es decreciente, por lo que basta encontrar, para todo $\varepsilon > 0$, un $\lambda \in D_{\mathcal{E}}$ tal que $\|b - b\lambda\| < \varepsilon$. El $\mathcal{B}_e-$módulo $\oplus_{t\in G}\mathcal{E}_t$ (ver la Sección 1.4.2.1) es pleno. Luego el punto (ii) del Lema 7.2 de [Lan95] implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe $f_1, \ldots, f_n \in \oplus_{t\in G}\mathcal{E}_t$ tales que $\|b - b(\langle f_1, f_1\rangle + \cdots + \langle f_n, f_n\rangle)\| < \varepsilon$ y $\|\langle f_1, f_1\rangle + \cdots + \langle f_n, f_n\rangle\| < 1$. Cada producto interno $\langle f_k, f_k\rangle$ puede ser aproximado por elementos de la forma ${c_1}^* c_1 + \cdots + {c_m}^* c_m$, de lo que deducimos que existe $\lambda \in D_{\mathcal{E}}$ lo suficientemente cera de $\langle f_1, f_1\rangle + \cdots + \langle f_n, f_n\rangle$ como para que $\|b - b\lambda\| < \varepsilon$.

Recíprocamente, si $\{\lambda\}_{\lambda\in D_{\mathcal{E}}}$ es una unidad aproximada de $\mathcal{B}$, entonces para todo $a\in\mathcal{B}_e^+$ se cumple que $a=\lim_\lambda a^{1/2}\lambda a^{1/2}$ y que $a^{1/2}\lambda a^{1/2}\in\mathcal{E}_0$ (para todo λ). Esto implica que $\mathcal{B}_e^+\subset\overline{\mathcal{E}_0}$, por lo que $\mathcal{E}_0$ es denso en $\mathcal{B}_e$. $\square$

El primer Teorema de [AMP09] es el siguiente, del cual completamos la prueba.

Teorema 2.6. *Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell y $\mathcal{A},\mathcal{E}\subset\mathcal{B}$ subfibrados de Banach de manera que $\mathcal{A}$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{E}\cup\mathcal{E}\mathcal{B}\subset\mathcal{E}$, $\mathcal{E}\mathcal{E}^*\subset\mathcal{A}$ y para todo $t\in G$, $\operatorname{span}(\mathcal{E}^*\mathcal{E}\cap\mathcal{B}_t)$ es denso en $\mathcal{B}_t$.*

Luego $C^*(\mathcal{A})$ es isomorfo a la completación de $C_c(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{B})$ y la completación de $C_c(\mathcal{E})$ en $C^*(\mathcal{B})$, $C^*(\mathcal{E})$, es un $C^*(\mathcal{A})-C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia de Morita que induce el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{A})$ en el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{B})$.

Demostración. Llamemos $\|\ \|_{\mathcal{A}}$ a la C*-norma maximal de $L^1(\mathcal{A})$. En la primer parte de la prueba de [AMP09, Teorema 1.1] se considera la norma $\|\ \|_E$ en $L^1(\mathcal{E})$ definida como $\|f\|_E:=\|f*f^*\|_{\mathcal{A}}^{1/2}$. No está claro que $f\mapsto\|f\|_E$ sea una norma porque para ello se necesita que $f*f^*$ sea positivo en $C^*(\mathcal{A})$, no sólo positivo en $C^*(\mathcal{B})$. Para probar que $\|\ \|_E$ es una norma basta con mostrar que $f*f^*\geq 0$ en $C^*(\mathcal{A})$, para toda $f\in C_c(\mathcal{E})$.

Sea $\{\lambda\}_{\lambda\in D_{\mathcal{E}}}$ la unidad aproximada de $\mathcal{B}$ dada por el Lema anterior y tomemos $f\in C_c(\mathcal{A})$. En lo que sigue consideraremos la acción de elementos de $\mathcal{B}$ como multiplicadores de $L^1(\mathcal{B})$; como en [FD88, VIII 5.8]. Sabemos que $\{(f\lambda)*f^*\}_{\lambda\in D_{\mathcal{E}}}$ converge a f^**f con respecto a $\|\ \|_1$. Fijado λ existen $x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{E}$ tales que $\lambda=x_1^*x_1+\cdots+x_n^*x_n$. Luego $(f\lambda)*f^*=\sum_{j=1}^n(fx_j^*x_j)*f^*=\sum_{j=1}^n(fx_j^*)*(fx_j^*)^*$ y $fx_j^*\in C_c(\mathcal{A})$ porque si $x_j\in\mathcal{E}_{t_j}$ entonces $[fx_j^*](t)=\Delta(t_j)f(tt_j)x_j^*\in\mathcal{E}\mathcal{E}^*\subset\mathcal{A}$. Esto implica que $(f\lambda)*f^*\geq 0$ en $C^*(\mathcal{A})$, tomando límite (con respecto a $\|\ \|_1$) deducimos que $f*f^*\geq 0$ en $C^*(\mathcal{A})$.

A partir de aquí continuamos como en la demostración de [AMP09, Teorema 1.1]. $\square$

Corolario 2.7. *Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell y $\mathcal{A},\mathcal{E}\subset\mathcal{B}$ subfibrados de Banach de manera que $\mathcal{A}$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{E}\cup\mathcal{E}\mathcal{A}\subset\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*\mathcal{E}\subset\mathcal{A}$ y para todo $t\in G$, $\operatorname{span}(\mathcal{E}\mathcal{E}^*\cap\mathcal{B}_t)$ es denso en $\mathcal{B}_t$.*

Luego $C^*(\mathcal{A})$ es isomorfo a la completación de $C_c(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{B})$ y la completación de $C_c(\mathcal{E})$ en $C^*(\mathcal{B})$, $C^*(\mathcal{E})$, es un $C^*(\mathcal{A})-C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia de Morita que induce el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{A})$ en el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{B})$.

Demostración. Siendo $\mathcal{F}:=\{x^*\colon x\in\mathcal{E}\}\subset\mathcal{B}$ observemos que $C_c(\mathcal{E})^*$ es el conjunto de todas las secciones continuas de soporte compacto de $\mathcal{B}$ con imagen contenida en

$\mathcal{F}$. Además $\{f(t)\colon f \in C_c(\mathcal{E})^*\} = \mathcal{F}_t$, de lo cual deducimos que $\mathcal{F}$ es un subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$. De la igualdad $C_c(\mathcal{E})^* = C_c(\mathcal{F})$ y del Teorema anterior se deduce fácilmente la tesis del presente Corolario. □

Ahora estamos listos para mostrar la inclusión de las C*-álgebras seccionales de los subfibrados hereditarios. La prueba que aparece a continuación se debe a F. Abadie, a quien el lector debe agradecer que no incluyamos la primer prueba que conseguimos completar.

Teorema 2.8. *Si $\mathcal{A}$ es un subfibrado hereditario del fibrado de Fell $\mathcal{B}$ entonces $C^*(\mathcal{A})$ es isomorfa a la clausura de $L^1(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{B})$ y $C^*(\mathcal{A}) \cap N_{\mathcal{B}} = N_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Como siempre G será el grupo de base. Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ definido de forma que $\mathcal{E}_t := \mathcal{E} \cap \mathcal{B}_t = \overline{\operatorname{span}}\,((\mathcal{A}\mathcal{B}) \cap \mathcal{B}_t)$. Para mostrar que $\mathcal{E}$ es un subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$ construiremos un conjunto de $\mathcal{E}-$secciones. Dada $f \in C_c(\mathcal{A})$ y $b \in \mathcal{B}_s$ definamos $[f,b]\colon G \to \mathcal{B}$ como $[f,b](t) := f(ts^{-1})b$. Es inmediato que $[f,b](G) \subset \mathcal{E}$ y que $[f,b] \in C_c(\mathcal{B})$. Además para toda $u \in C(G)$ se tiene $u[f,b] = [uf,b]$. Si $S := \operatorname{span}\{[f,b]\colon f \in C_c(\mathcal{A}), b \in \mathcal{B}\}$ entonces lo anterior implica que $C(G)S \subset S$. Por otro lado para cada $t \in G$ $\{u(t)\colon u \in S\}$ es denso en $\mathcal{E}_t$ porque $\mathcal{A}_t = \{f(t)\colon f \in C_c(\mathcal{A})\}$. Luego $\mathcal{E}$ es un subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$.

Puesto que $\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}$ tenemos $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ y de la definición de $\mathcal{E}$ puede mostrarse fácilmente que $\mathcal{A}\mathcal{E} \cup \mathcal{E}\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ y que $\mathcal{E}\mathcal{E}^* \subset \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ definido de forma que $\mathcal{I}_t = \overline{\operatorname{span}}\,(\mathcal{B}_t \cap (\mathcal{E}^*\mathcal{E}))$. Imitando la demostración de que $\mathcal{E}$ es un subfibrado de Banach se demuestra que $\mathcal{I}$ es un subfibrado de Banach de $\mathcal{B}$. De las Observaciones hechas al inicio de este párrafo se deduce que $\mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{B}$ y que $\mathcal{A} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{A}\mathcal{E} \cup \mathcal{E}\mathcal{I} \subset \mathcal{E}$. Por construcción $\mathcal{I}_e = \overline{\operatorname{span}}\,(\mathcal{B}_t \cap (\mathcal{E}^*\mathcal{E}))$, luego el Teorema anterior implica que $C^*(\mathcal{A})$ es la clausura de $L^1(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{I})$. La Proposición 2.4 implica que $C^*(\mathcal{I})$ es la clausura de $L^1(\mathcal{I})$ en $C^*(\mathcal{B})$, por lo que $C^*(\mathcal{A})$ es la clausura de $L^1(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{B})$.

Finalmente la igualdad $C^*(\mathcal{A}) \cap N_{\mathcal{B}} = N_{\mathcal{A}}$ se deduce de la Proposición 2.3. □

Cerramos esta sección con dos resultados relacionados a la restricción de acciones y a los subfibrados.

Proposición 2.9. *Supongamos que α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A, B es un ideal de A y que llamamos β a la restricción de α a B. Luego $\mathcal{B}\beta$ es un subfibrado hereditario de $\mathcal{B}\alpha$, $B \rtimes_\beta G$ es la clausura de $L^1(\mathcal{B}\beta)$ en $A \rtimes_\alpha G$, $B \rtimes_\beta G$ es hereditario en $A \rtimes_\alpha G$ y $(B \rtimes_\beta G) \cap N_{\mathcal{B}\alpha} = N_{\mathcal{B}\beta}$.*

En caso que B sea $\alpha-$invariante $\mathcal{B}\beta$ es un ideal en $\mathcal{B}\alpha$ y las afirmaciones anteriores son verdaderas si se reemplaza "hereditaro" por "ideal".

Demostración. Sabemos que $\mathcal{B}\beta$ es un fibrado de Fell y que en tanto conjuntos $\mathcal{B}\beta \subset \mathcal{B}\alpha$. La topología de $\mathcal{B}\beta$ es la relativa a $B \times G$, que es la relativa a $A \times G$, por lo tanto $\mathcal{B}\beta$ es un subfibrado de Banach de $\mathcal{B}\alpha$. Dado que β es la restricción de α las operaciones $*-$algebraicas de $\mathcal{B}\beta$ son las restricciones de las operaciones de $\mathcal{B}\alpha$, esto muestra que $\mathcal{B}\beta$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}\alpha$.

Para mostrar que $\mathcal{B}\beta$ es hereditario tomemos $a\delta_r, c\delta_t \in \mathcal{B}\beta$ y $b\delta_s \in \mathcal{B}\alpha$. Digamos que $a\delta_r b\delta_s c\delta_t = d\delta_{rst}$, debemos mostrar que $d \in B_{rst} = B\alpha_{rst}(A_{t^{-1}s^{-1}r^{-1}}B)$. Por un lado

$$d\delta_{rst} = a\delta_r(b\delta_s c\delta_t) = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)c))\delta_{rst}.$$

Usando una unidad aproximada de $A_{r^{-1}}$, $\{e_i\}_i$, se deduce que

$$d = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)c)) = \lim_i a\alpha_r(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)ce_i) \in A$$

Por otro lado

$$d\delta_{rst} = (a\delta_r b\delta_s)c\delta_t = \alpha_{rs}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)c\right)\delta_{rst}.$$

Sea $f := \alpha_{t^{-1}s^{-1}r^{-1}}(d) = \alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)c\right)$. Como $\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)c$ pertenece a $\alpha_{s^{-1}}(A_{r^{-1}}A_{s^{-1}})B_t \subset B_t$ se tiene $f = \beta_{t^{-1}}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)c\right) \in B$. Si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $\alpha_{s^{-1}}(A_{r^{-1}}A_{s^{-1}})B_t \subset A_{s^{-1}r^{-1}}A_{s^{-1}}A_t$ entonces

$$\begin{aligned}
f &= \alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)c\right) = \lim_i \alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)ce_i\right) \\
&= \lim_i \alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b\alpha_s(ce_i))\right) = \lim_i \alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a\alpha_r(b\alpha_s(ce_i))))\right) \\
&= \lim_i \alpha_{t^{-1}s^{-1}r^{-1}}\left(a\alpha_r(b\alpha_s(ce_i))\right) \in A_{t^{-1}s^{-1}r^{-1}}.
\end{aligned}$$

Luego $f \in BA_{t^{-1}s^{-1}r^{-1}}$ y $d = \alpha_{rst}(f) \in B\alpha_{rst}(A_{t^{-1}s^{-1}r^{-1}}B)$.

En caso que B sea $\alpha-$invariante $a\delta_r b\delta_s = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\delta_{rt}$ y $\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)$ pertenece a $\alpha_r(A_{r^{-1}}BA_s) \subset BA_{rs}$. Luego $a\delta_r b\delta_s \in \mathcal{B}\beta$ y $\mathcal{B}\beta$ es un ideal de $\mathcal{B}\alpha$.

El resto de las afirmaciones se deduce de los resultados anteriores sobre fibrados de Fell hereditarios. □

Proposición 2.10. *Supongamos que α es una acción global en C*-álgebras de G en A, B es una C*-subálgebra hereditaria y $\alpha-$invariante de A y que llamamos β a la restricción de α a B. Luego $\mathcal{B}\beta$ es un subfibrado hereditario de $\mathcal{B}\alpha$, $B \rtimes_\beta G$ es la clausura de $L^1(\mathcal{B}\beta)$ en $A \rtimes_\alpha G$, $B \rtimes_\beta G$ es hereditario en $A \rtimes_\alpha G$ y $(B \rtimes_\beta G) \cap N_{\mathcal{B}\alpha} = N_{\mathcal{B}\beta}$.*

Demostración. Que $\mathcal{B}\beta$ es un subfibrado de Fell de $\mathcal{B}\alpha$ se deduce razonando de manera similar a lo hecho en la demostración de la Proposición anterior. Como allí tan sólo necesitamos mostrar que $\mathcal{B}\beta$ es hereditario en $\mathcal{B}\alpha$. Si $a\delta_r, c\delta_t \in \mathcal{B}\beta, b\delta_s \in \mathcal{B}\alpha$ y $d\delta_{rst} = a\delta_r b\delta_s c\delta_t$ entonces

$$d = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)c)) = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b\alpha_s(c)) \in \alpha_r(ABA) \subset \alpha_r(A) \subset A.$$

Con lo cual $d\delta_{rst} \in \mathcal{B}\beta$ y $\mathcal{B}\beta$ es hereditario en $\mathcal{B}\alpha$. □

A modo de ejemplo de la utilidad de los resultados anteriores enunciamos un corolario que permite estudiar el producto cruzado de una acción parcial (global en particular) a partir de la restricción a los ideales del álgebra.

Corolario 2.11. *Supongamos que α es una acción parcial en C*-áglebras de G en A, J es un conjunto ordenado y que $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia creciente de ideales de A de forma que $\overline{\cup_{j\in J} B_j} = A$. Definamos $\beta_j := \alpha|_{B_j}$, para cada $j \in J$. Luego $\{B_j \rtimes_{\beta_j} G\}_{j\in J}$ es una familia creciente de C*-subálgebras hereditarias de $A \rtimes_\alpha G$ y $\overline{\cup_{j\in J} B_j \rtimes_{\beta_j} G} = A \rtimes_\alpha G$. Además la afirmación análoga para los productos cruzados reducidos también es válida.*

Demostración. Si $j \leq k$ entonces $\beta_j = \alpha|_{B_j} = \alpha|_{B_k}|_{B_j} = \beta^k|_{B_j}$ y B_j es un ideal de B_k. Por lo tanto $\mathcal{B}\beta_j$ es un subfibrado hereditario de $\mathcal{B}\beta^k$ y $B_j \rtimes_{\beta_j} G$ está contenida en $B_k \rtimes_{\beta^k} G$ (pensando todo dentro de $A \rtimes_\alpha G$).

Tomemos una unidad aproximada[3] de A, $\{u_k\}_{k\in K}$. Sea $L := K \times (0,1)$ con el orden $(k,\varepsilon) \leq (k,\varepsilon')$ sii $k \leq k'$, $\varepsilon' \leq \varepsilon$ (en $(0,1)$ consideramos el orden de $\mathbb{R}$). Puesto que $\overline{\cup_{j\in J} B_j} = A$, para cada $l = (k,\varepsilon) \in L$ existen $j \in J$ y $b_l \in B_j^+$ tales que $\|u_k - b_l\| < \varepsilon$. Notemos que $\{b_l\}_{l\in L}$ es una red acotada de A^+ contenida en $\cup_{j\in J} B_j$. Además para todo $a \in A$ se tiene $\lim_l ab_l = \lim_l b_l a = a$. En efecto, dados $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ tomemos $k_0 \in K$ de forma que $\|a - au_k\| < \varepsilon/2$ para todo $k \geq k_0$. Si $l_0 = (k_0, \frac{\varepsilon}{2(\|a\|+1)})$ y tomamos $l = (p,\delta) \geq l_0$ entonces

$$\|a - ab_l\| = \|a - au_p\| + \|a\|\|u_p - b_l\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|a\|\frac{\varepsilon}{2(\|a\|+1)} < \varepsilon.$$

Luego $\lim_l ab_l = a$ (para todo $a \in A$) y $\lim_l b_l a = (\lim_l a^* b_l)^* = a$.

Recordemos la Notación 1.46 que relacionaba los elementos de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con $C_c^\alpha(G,A)$. Fijada $f\delta \in C_c(\mathcal{B}\alpha)$ definamos, para cada $l \in L$,

$$f_l\delta(t) := b_l\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(f(t))b_l)\delta_t = b_l\delta_e f(t)\delta_t b_l\delta_e.$$

Por construcción $\{f_l\delta\}_{l\in L} \subset \cup_{j\in J} B_j \rtimes_{\beta_j} G$ y para cada $l \in L$ $\mathrm{sop}(f_l\delta) \subset f\delta$. Habremos completado la demostración si logramos probar que $\{f_l\delta\}_{l\in L}$ converge a $f\delta$ en $A \rtimes_\alpha G$, para lo cual es suficiente probar la convergencia uniforme.

[3] Unidad aproximada en tanto C*-álgebra.

En el lenguaje de [FD88] sabemos que $\mathcal{B} := \mathcal{B}\alpha$ tiene unidades aproximadas fuertes, por lo que para todo $t \in G$ $\mathcal{B}_e\mathcal{B}_t$ y $\mathcal{B}_t\mathcal{B}_e$ son densos en $\mathcal{B}_t$. En esta situación [FD88, VIII 2.13] implica que cualquier unidad aproximada del álgebra de Banach $\mathcal{B}_e$ es una unidad aproximada fuerte de $\mathcal{B}$. En particular $\{b_l\delta_e\}_{l\in L}$ es una unidad aproximada fuerte de $\mathcal{B}$. Puesto que para todo $t \in G$

$$\begin{aligned}\|f_l\delta(t) - f\delta(t)\| &\le \|b_l\delta_e f\delta(t)b_l\delta_e - b_l\delta_e f\delta(t)\| + \|b_l\delta_e f\delta(t) - f\delta(t)\| \\ &\le \|b_l\|\|f\delta(t)b_l\delta_e - f\delta(t)\| + \|b_l\delta_e f\delta(t) - f\delta(t)\|,\end{aligned}$$

de [FD88, VIII 2.12] se deduce que $\{f_l\delta\}_{l\in L}$ converge uniformemente a $f\delta$ en $\mathrm{sop}(f)$ y por lo tanto uniformemente en G.

En cuanto a los productos cruzados reducidos basta observar que los argumentos anteriores son válidos cambiando por productos cruzados universales por los reducidos. □

2.2. La acción Morita envolvente

Supongamos que α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A. Recordemos que $C_c^\alpha(G,A) \to C_c(\mathcal{B}\alpha)$, $f \mapsto f\delta$ $(f\delta(t) = f(t)\delta_t)$, es un isomorfismo lineal. En [Aba03] se demuestra que existe una única acción parcial en módulos de Hilbert, γ, de G en $L^2(\mathcal{B}\alpha)$ de manera que $\gamma^r = \alpha$ y $\gamma_t(f\delta)(r) = \Delta(t)^{1/2}f(rt)\delta_r$, para toda $f\delta \in C_c(\mathcal{B}\alpha)A_{t^{-1}}$ y $r,t \in G$. Otro de los resultados fundamentales de Abadie es que γ^l es globalizable. Con la envolvente de γ^l podemos construir una Morita envolvente:

Definición 2.12. Sea α una acción parcial en C*-álgebras de G en A. Diremos que (β, B, I) es una *Morita envolvente* de α si β es una acción parcial en C*-álgebras de G en B, I es un ideal de B, $\overline{[\beta I]} = B$ y α es Morita equivalente a $\beta|_I$ (Definición 1.44).

La acción β está determinada, a menos de equivalencia de Morita, por α [Aba03, Proposición 6.3]. En el Corolario 3.8 damos una prueba alternativa de ese hecho.

Lema 2.13. *Si γ es la acción parcial de G en $L^2(\mathcal{B}\alpha)$ descrita arriba y γ' la acción parcial de G en $L^2_\alpha(G,A)$ del Ejemplo 1.6, entonces existe un único unitario $U \in \mathbb{B}(\gamma,\gamma')$ tal que $U(f\delta)(r) = \Delta(r)^{-1/2}\alpha_r(f(r^{-1}))$, para toda $f \in C_c^\alpha(G,A)$ y $r \in G$.*

Demostración. Definamos $U\colon C_c(\mathcal{B}\alpha) \to C_c^\alpha(G,A)$, $U(f\delta)(r) = \Delta(r)^{-1/2}\alpha_r(f(r^{-1}))$. Es fácil mostrar que U es una biyección lineal. Como

$$\begin{aligned}\langle U(f\delta), U(f\delta)\rangle_{L^2_\alpha(G,A)} &= \int_G \Delta(r)^{-1}\alpha_r(f(r^{-1})^*g(r^{-1}))\,dr \\ &= \int_G \Delta(r)^{-1}\alpha_{r^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(f(r))^*)g(r))\,dr = \langle f\delta, g\delta\rangle_{L^2(\mathcal{B}\alpha)},\end{aligned}$$

U es una isometría y tiene una única extensión continua de $L^2(\mathcal{B}\alpha)$ en $L^2_\alpha(G,A)$; también llamada U. Con argumentos elementales de continuidad deducimos que U preserva el producto interno y es unitario porque tiene rango denso.

Para mostrar que $U \in \mathbb{B}(\gamma,\gamma')$ tomemos $t \in G$ y $f\delta \in C_c(\mathcal{B}\alpha)A_{t^{-1}}$. Luego

$$\begin{aligned} U(\gamma_t(f\delta))(r) &= \Delta(t^{-1}r)^{-1/2}\alpha_r(f(r^{-1}t)) = \alpha_t(\Delta(t^{-1}r)^{-1/2}\alpha_{t^{-1}r}(f(r^{-1}t))) \\ &= \gamma'_t(U(f\delta))(r). \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $U \circ \gamma_t$ coincide con $\gamma'_t \circ U$ en $C_c(\mathcal{B}\alpha)A_{t^{-1}}$, que es denso en $L^2(\mathcal{B}\alpha)A_t$. Entonces $U \circ \gamma_t = \gamma'_t \circ U$. □

En el resto de la tesis trabajaremos con $L^2_\alpha(G,A)$ más que con $L^2(\mathcal{B}\alpha)$ pues los temas relacionados a las acciones cuadrado integrables (globales) [Mey, Mey01] han sido desarrollados utilizando $L_2(G,A)$.

2.3. Equivalencia de representaciones por isomorfismos

Recordemos de [FD88] que una $*-$representación de un fibrado de Fell $\mathcal{B}$ es una función $T\colon \mathcal{B} \to B(X)$ donde X es un espacio de Hilbert y se cumple que (i) T es lineal en cada fibra (ii) para todo $a, b \in \mathcal{B}$, $T_{ab} = T_aT_b$ y $T_{a^*} = {T_a}^*$ y (iii) para todo $x \in X$ la función $\mathcal{B} \to X$, $b \mapsto T_bx$, es continua.

Se dice que T es no degenerada si $T(\mathcal{B})X$ genera un espacio denso en X, esto es equivalente a que $T|_{\mathcal{B}_e}$ sea no degenerada y, por el Teorema de Cohen-Hewitt, esto equivale a que $X = T(\mathcal{B}_e)X$.

Para cada $*-$representación $T\colon \mathcal{B} \to B(X)$ existe [FD88, VIII 11] una única $*-$representación $\widetilde{T}\colon C^*(\mathcal{B}) \to B(X)$ tal que $\widetilde{T}_f(h) = \int_G T_{f(t)}h\,dt\ \forall\ f \in C_c(\mathcal{B})$ y $h \in H$. Esta última representación se denomina la *forma integrada* de T. De hecho toda $*-$representación de $C^*(\mathcal{B})$ se obtiene de esta forma y T es no degenerada si y solamente si $\widetilde{T}$ lo es. Además si la $*-$representación $\pi\colon C^*(\mathcal{B}) \to B(X)$ es no degenerada entonces existe una única $*-$representación $T\colon \mathcal{B} \to B(X)$ tal que $\widetilde{T} = \pi$.

La noción más fuerte de isomorfismo entre fibrados de Fell está dada por los morfismos de fibrados de Fell, que requieren que los grupos en cuestión sean isomorfos. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fibrados de Fell sobre G y H respectivamente. Una función $\rho\colon G \to H$ es un isomorfismo si es un isomorfismo de grupos que también es un homeomorfismo.

Definición 2.14. La función $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un *morfismo de fibrados de Fell* si es una función continua para la cual existe un isomorfismo $\rho\colon G \to H$ tal que:

1. Para todo $t \in G : \phi(\mathcal{A}_t) = \mathcal{B}_{\rho(t)}$ y $\phi|_{\mathcal{A}_t}$ es lineal.

2. Para todo $a, b \in \mathcal{A} : \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ y $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

Seguramente el lector se preguntará por qué admitimos la posibilidad de que $G \neq H$ pero requerimos un isomorfismo entre G y H. Esto se debe a que más adelante tendremos dos grupos HLC, K y L, y fibrados sobre $K \times L$ y $L \times K$; entonces nos interesará cambiar $K \times L$ por $L \times K$ pero para hacer eso necesitamos mostrar que el cambio puede hacerse.

Ejemplo 2.1. Supongamos que $\mathcal{B}$ es un fibrado de Fell sobre G y que $\phi\colon H \to G$ es un isomorfismo de grupos HLC. La retracción de $\mathcal{B}$ por ϕ [FD88, VIII 3.17], $\mathcal{C}$, es un fibrado de Fell sobre H. De hecho como espacios topológicos puede pensarse $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ y si $\pi\colon \mathcal{B} \to G$ es la proyección de $\mathcal{B}$ entonces $\phi^{-1} \circ \pi$ es la proyección de $\mathcal{C}$. Así la fibra $\mathcal{C}_t$ es $\mathcal{B}_{\phi(t)}$ como espacio de Banach y $\rho\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, $c \mapsto c$, es un isomorfismo de fibrados de Fell.

La definición tiene varias consecuencias. La primera es que el isomorfismo ρ está determinado por ϕ, escribiremos $\rho = \rho_\phi$. La composición de morfismos es un morfismo, por lo que definimos la composición de morfismos como composición de funciones.

Todo morfismo entre fibrados de Fell es contractivo porque $\phi|_{\mathcal{A}_e}$ es un $*-$homomorfismo entre C*-álgebras y ello implica que para todo $a \in \mathcal{A} : \|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2$. El morfismo ϕ preservará la norma si y solamente si es inyectivo $\mathcal{A}_e$ y siempre que sea biyectivo su función inversa será un morfismo de fibrados de Fell. La dificultad para probar esto último es demostrar que la inversa es continua, lo que es inmediato de los comentarios anteriores y de [FD88, II 13.17].

Recordemos que $N_\mathcal{B}$ representaba el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{B})$.

Proposición 2.15. *Supongamos que $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un morfismo de fibrados de Fell y definamos $\rho := \rho_\phi\colon G \to H$. Luego existe un único $*-$homomorfismo $\widetilde{\phi}\colon C^*(\mathcal{A}) \to C^*(\mathcal{B})$ tal que $\widetilde{\phi}(f)(\rho(t)) = \phi(f(t))$, para toda $f \in C_c(\mathcal{A})$. Además se cumple que $\widetilde{\phi}(N_\mathcal{A}) \subset N_\mathcal{B}$. En caso que ϕ sea un isomorfismo $\widetilde{\phi}$ también lo es, $\widetilde{\phi}^{-1} = \widetilde{\phi^{-1}}$ y $\widetilde{\phi}(N_\mathcal{A}) = N_\mathcal{B}$.*

Demostración. Recordemos que la construcción de $C^*(\mathcal{B})$ no depende de la medida de Haar invariante a izquierda que utilicemos, por lo que podemos asumir que ρ transforma la medida elegida en G, μ, en la elegida en H, ν.

Definamos $\widetilde{\phi}\colon C_c(\mathcal{A}) \to C_c(\mathcal{B})$ como $\widetilde{\phi}(f) := \phi \circ f \circ \rho^{-1}$. Es claro que $\widetilde{\phi}$ es continua y, además, $\|\widetilde{\phi}(f)\|_{C^*(\mathcal{B})} \leq \|\widetilde{\phi}(f)\|_1 = \int_H \|\phi(f(\rho^{-1}(t)))\|\, d\nu(t) \leq \int_G \|f(s)\|\, d\mu(s) = \|f\|_1$. Luego existe un único $*-$homomorfismo de $L^1(\mathcal{A})$ es $C^*(\mathcal{B})$ que extiende a $\widetilde{\phi}$. Como $C^*(\mathcal{A})$ es la C*-álgebra envolvente de $L^1(\mathcal{A})$ esta extensión admite, a su vez, una única extensión a un $*-$homomorfismo de $C^*(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{B})$, que llamaremos $\widetilde{\phi}$. Esto muestra la existencia, la unicidad se deduce de que $C_c(\mathcal{A})$ es denso en $C^*(\mathcal{A})$.

Para mostrar la última afirmación tomemos una $*-$representación $T\colon \mathcal{B}\to B(X)$ tal que $T|_{\mathcal{B}_e}$ es inyectiva. Sea $\lambda^H\colon H\to B(L^2(H))$ la representación regular de H. Tal como en [EN] construyamos $T^\lambda := T\otimes\lambda^H\colon \mathcal{B}\to B(X\otimes L^2(H))$ como la única $*-$representación tal que para $b\in\mathcal{B}_t$, $T\otimes\lambda^H(b) = T_b\otimes\lambda^H_t$. La forma integrada de T^λ, $\widetilde{T^\lambda}$, es una $*-$representación de $C^*(\mathcal{B})$ cuyo núcleo es $N_\mathcal{B}$ [EN]. Por otro lado definamos $S := T\circ\phi\colon \mathcal{A}\to B(X)$ y $U\colon L^2(G)\to L^2(H)$ como $U(\xi)=\xi\circ\rho^{-1}$. Observemos que U es un unitario y que $U\circ\lambda^G_t\circ U^* = \lambda^H_{\rho(t)}$. Luego $V := \mathrm{id}_X\otimes U\colon X\otimes L^2(G)\to X\otimes L^2(H)$ es un unitario y para toda $f\in C_c(\mathcal{A})$, $x\in X$ y $a\in L^2(H)$:

$$\begin{aligned}
V\circ\widetilde{S^\lambda}(f)\circ V^*(x\otimes a) &= \int_G T\circ\phi_{f(t)}\otimes U\circ\lambda^G_t\circ U^*(a)d\mu(t)\\
&= \int_G T\circ\phi_{f(t)}\otimes\lambda^H_{\rho(t)}(a)d\mu(t) = \int_H T\circ\phi_{f\circ\rho^{-1}(s)}\otimes\lambda^H_s(a)d\nu(s)\\
&= \widetilde{T^\lambda}(\widetilde{\phi}(f))(x\otimes a).
\end{aligned}$$

Esto último implica $\|\widetilde{S^\lambda}(u)\| = \|\widetilde{T^\lambda}\circ\widetilde{\phi}(u)\|\ \forall\ u\in C^*(\mathcal{A})$. Para todo $u\in N_\mathcal{A}$ se tiene [EN] $\widetilde{S^\lambda}(u)=0$, lo que implica $\widetilde{\phi}(u)\in N_\mathcal{B}$.

Si ϕ es un isomorfismo entonces $\widetilde{\phi}\circ\widetilde{\phi^{-1}} = \widetilde{\mathrm{id}_\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{C^*(\mathcal{A})}$ y $\widetilde{\phi^{-1}}\circ\widetilde{\phi} = \widetilde{\mathrm{id}_\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{C^*(\mathcal{B})}$. Para terminar observemos que $N_\mathcal{B} = \widetilde{\phi}(\widetilde{\phi^{-1}}(N_\mathcal{B}))\subset\widetilde{\phi}(N_\mathcal{A})\subset N_\mathcal{B}$. □

Del resultado anterior deducimos que si $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\mathcal{B}$ entonces $C^*(\mathcal{A})$ lo es a $C^*(\mathcal{B})$ y lo mismo sucede con los productos cruzados reducidos ya que el isomorfismo en cuestión se factoriza en un isomorfismo entre $C^*(\mathcal{A})/N_\mathcal{A}$ y $C^*(\mathcal{B})/N_\mathcal{B}$.

Esta noción de isomorfismo es extremadamente fuerte ya que requiere que los grupos de los fibrados sean isomorfos como grupos HLC. Más adelante en la tesis trabajaremos con fibrados sobre grupos no isomorfos pero aún nos interesará establecer isomorfismos entre sus C*-álgebras seccionales (plenas y reducidas). Esto motiva lo siguiente.

Definición 2.16. Dados dos fibrados de Fell, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que $\mathcal{A}$ es *r-isomorfo* a $\mathcal{B}$ si existe un isomorfismo $\phi\colon C^*(\mathcal{A})\to C^*(\mathcal{B})$ tal que $\phi(N_\mathcal{A}) = N_\mathcal{B}$. La función ϕ es llamada un $r-$isomorfismo.

Observación 2.17. Si $\mathcal{A}$ es $r-$isomorfo a $\mathcal{B}$ entonces $C^*(\mathcal{A})$ es isomorfo a $C^*(\mathcal{B})$ y $C^*_r(\mathcal{A})$ a $C^*_r(\mathcal{B})$. Además $\mathcal{A}$ es promediable si y solamente si $\mathcal{B}$ lo es.

Ejemplo 2.2. La Proposición de arriba nos dice que fibrados de Fell isomorfos son $r-$isomorfos.

La noción de $r-$isomorfismo relaciona las representaciones de los fibrados más que los fibrados en sí. Para explicar este punto más claramente supongamos que $\phi\colon C^*(\mathcal{A})\to C^*(\mathcal{B})$ es un $r-$isomorfismo. Dada una representación no degenerada $T\colon\mathcal{B}\to B(X)$

existe una única representación no degenerada $T^\phi\colon \mathcal{A}\to B(X)$ tal que $\widetilde{T^\phi}=\widetilde{T}\circ\phi$. Observemos que $(T^\phi)^{\phi^{-1}}=T$, por lo que la correspondencia $T\mapsto T^\phi$ es biyectiva. Además $\widetilde{T}$ se factoriza a través de $C^*(\mathcal{B})/N_{\mathcal{B}}$ si y solamente si $\widetilde{T^\phi}$ se factoriza a través de $C^*(\mathcal{A})/N_{\mathcal{A}}$.

En el resto de esta sección nos dedicamos a encontrar isomorfismos entre C*-álgebras seccionales de fibrados de Fell sobre grupos distintos. También daremos condiciones bajo las cuales esos isomorfismos son $r-$isomorfismos.

En caso que α sea una C*-acción parcial y $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell diremos que α es $r-$isomorfa a $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}\alpha$ es $r-$isomorfo a $\mathcal{B}$. Si σ es una acción parcial HLC diremos que σ es $r-$isomorfa a $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}\Theta(\sigma)$ es $r-$isomorfo a $\mathcal{B}$. Así es que el $r-$isomorfismo puede establecerse entre dos cualesquiera de los siguientes objetos: acciones parciales en C*-álgebras, acciones parciales HLC y fibrados de Fell. En cualquier caso estaremos diciendo que los fibrados de Fell correspondientes ($\mathcal{B}\alpha$ o $\mathcal{B}\Theta(\sigma)$ según el caso) son $r-$isomorfos.

En lo que sigue utilizaremos las construcciones de fibrado seccional parcial[4] (*partial cross sectional bundle* en [FD88, VIII 6]) de fibrado C*-completación (*bundle C*-completion* en [FD88, VIII 16]), de retracción (*retraction* en [FD88, VIII 3.17]) y de reducción (*reduction* en [FD88, II 13.3]).

Teorema 2.18. *Sean $\mathcal{B}$ un fibrado de Fell sobre G y N un subgrupo normal y cerrado de G. Si $\mathcal{C}$ es el fibrado seccional parcial sobre $H:=G/N$ derivado de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ el fibrado C*-completación de $\mathcal{C}$ entonces $C^*(\mathcal{B})$ es isomorfo a $C^*(\mathcal{D})$.*

Demostración. Denotaremos tN a la clase de $t\in G$ en H. En el resto de la prueba utilizaremos la notación del Capítulo VIII de [FD88], excepto para referirnos a las secciones continuas de soporte compacto de un fibrado. En aquel texto se denota $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ pero nosotros escribiremos $C_c(\mathcal{B})$. De acuerdo a [FD88, VIII 6.7] existe una única isometría sobreyectiva $\Phi\colon L^1(\mathcal{B})\to L^1(\mathcal{C})$ de manera que $\Phi(f)(tN)=f|_{tN}$, para toda $f\in C_c(\mathcal{B})$ y $tN\in H$. Esto nos da un isomorfismo entre las C*-completaciones de las $*-$álgebras de Banach $L^1(\mathcal{B})$ y $L^1(\mathcal{C})$. Debido a que Φ es un isomorfismo de C*-álgebras $L^1(\mathcal{C})$ es reducida, y la pensamos como una $*-$subálgebra densa de su C*-completación $C^*(L^1(\mathcal{C}))$. Luego Φ admite una única extensión de $C^*(\mathcal{B})$ en $C^*(L^1(\mathcal{C}))$, que también llamaremos Φ. Hemos mostrado que existe un único isomorfismo de C*-álgebras $\Phi\colon C^*(\mathcal{B})\to C^*(L^1(\mathcal{C}))$ tal que $\Phi(f)(tN)=f|_{tN}$, para toda $f\in C_c(\mathcal{B})$ y $tN\in H$.

Por otro lado la construcción de $\mathcal{D}$ en base a $\mathcal{C}$ nos dice que para cada $h\in H$ la fibra $\mathcal{D}_h$ es una completación de $\mathcal{C}_h$ con respecto a una norma dominada por la norma de $\mathcal{C}_h$; por lo tanto existe un único morfismo de fibrados $\iota\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ de manera que $\iota|_{\mathcal{C}_h}$ es la inclusión

[4] Este es, quizás, en único lugar en de este trabajo donde "parcial" no hace referencia a una acción.

canónica de $\mathcal{C}_h$ en $\mathcal{D}_h$. La construcción de la topología de $\mathcal{D}$ implica que existe una única contracción con rango denso $\Psi\colon L^1(\mathcal{C}) \to L^1(\mathcal{D})$ de manera que $\Psi(f) = \iota \circ f$, para toda $f \in C_c(\mathcal{C})$. Además Ψ es un $*-$homomorfismo porque es continuo y su restricción a $C_c(\mathcal{C})$ es un $*-$homomorfismo. Luego existe un único $*-$homomorfismo de $C^*(L^1(\mathcal{C}))$ en $C^*(\mathcal{D})$ que extiende a Ψ, también denotado Ψ. Observemos que este último mapa es sobreyectivo porque $\Psi(C_c(\mathcal{C}))$ es denso en $C_c(\mathcal{D})$ en la topología del límite inductivo.

La prueba habrá concluido si mostramos que Ψ es inyectiva. Tomemos $a \in C^*(L^1(\mathcal{C}))$ tal que $\Psi(a) = 0$. Sabemos que existe una $*-$representación no degenerada $\pi\colon C^*(L^1(\mathcal{C})) \to B(X)$ tal que $\|\pi(a)\| = \|a\|$. La restricción $\rho := \pi|_{L^1(\mathcal{C})}$ es una $*-$representación de $L^1(\mathcal{C})$. Luego [FD88, VIII 13.2] existe una única $*-$representación $T\colon \mathcal{C} \to B(X)$ tal que $\widetilde{T} = \rho$; es decir $\rho(f)x = \int_G T_{f(t)}x\,dt$, para toda $f \in C_c(\mathcal{C})$ y $x \in X$. La construcción de $\mathcal{D}$ a partir de $\mathcal{C}$ [FD88, VIII 16.7] implica que existe una única representación no degenerada $S\colon \mathcal{D} \to B(X)$ tal que $S \circ \iota = T$. Luego $\widetilde{S} \circ \Psi = \rho$ porque para toda $f \in C_c(\mathcal{C})$ y $x \in X$:

$$\rho(f)(x) = \int_G T_{f(t)}x\,dt = \int_G S_{\iota(f(t))}x\,dt = \int_G S_{\Psi(f)(t)}x\,dt = \widetilde{S} \circ \Psi(f)(x).$$

Entonces $\|a\| = \|\rho(a)\| = \|\widetilde{S} \circ \Psi(a)\| \leq \|\Psi(a)\| = 0$ y $a = 0$. $\square$

Uno espera que el isomorfismo $\Psi \circ \Phi$ construido arriba sea un $r-$isomorfismo. Para determinar si esto es verdad necesitamos calcular $\Psi \circ \Phi(N_{\mathcal{B}})$, lo que haremos estudiando cómo transforma $\Psi \circ \Phi$ las representaciones de $\mathcal{B}$ en representaciones de $\mathcal{D}$.

Recordemos la construcción de [EN02] de algunas representaciones inyectivas de $C_r^*(\mathcal{B})$. Sean $\mathcal{E}$ un fibrado de Fell sobre K y $\lambda^K\colon K \to \mathbb{B}(L^2(K))$ la representación regular de K. Dada una $*-$representación $T\colon \mathcal{E} \to B(X)$ definamos $\lambda^K \otimes T\colon \mathcal{E} \to B(L^2(K) \otimes X)$ como $\lambda^K \otimes T(b) = \lambda_t^K \otimes T_b$, cuando $b \in \mathcal{B}_t$. Se cumple que si $T|_{\mathcal{E}_e}$ es inyectiva entonces el núcleo de la forma integrada de $\lambda^K \otimes T$, $(\lambda^K \otimes T)^\sim$, es $N_{\mathcal{E}}$.

En los párrafos donde mostramos que Ψ es inyectiva describimos cómo Ψ convierte una $*-$representación no degenerada T de $\mathcal{C}$ en una T^Ψ de $\mathcal{D}$ de manera que $\widetilde{T} = \widetilde{T^\Psi} \circ \Psi$. El pasaje de una $*-$representación no degenerada T de $\mathcal{B}$ a una T^Φ de $\mathcal{C}$ de manera que $\widetilde{T} = \widetilde{T^\Phi} \circ \Phi$ se describe en [FD88, VIII 15.9]. A continuación usamos ambas conversiones.

Tomemos una $*-$representación $R\colon \mathcal{B} \to B(X)$ no degenerada y definamos

$$S = \lambda^{G/N} \otimes R\colon \mathcal{B} \to \mathbb{B}(L^2(G/N) \otimes X) \text{ como } S(a) := \lambda_{tN}^{G/N} \otimes R_a, \text{ si } a \in \mathcal{B}_t.$$

Sea $S' := (\lambda^G \otimes S)^{\Phi^\Psi}$, la cual es la única representación de $\mathcal{D}$ que satisface $\widetilde{S'} \circ \Psi \circ \Phi = (\lambda^G \otimes S)^\sim$. Sean $U\colon L^2(G/N) \otimes L^2(G) \otimes X \to L^2(G) \otimes L^2(G/N) \otimes X$ el unitario tal que $U(v \otimes w \otimes x) = w \otimes v \otimes x$; $Y = L^2(G) \otimes X$ y $T := (\lambda^G \otimes R)^{\Phi^\Psi}\colon \mathcal{D} \to B(Y)$. Dados

$tN \in G/N$, $f \in C_c(\mathcal{B}|tN) \subset \mathcal{C}_{tN}$, $v \in L^2(G/N)$, $w \in L^2(G)$ y $x \in X$:

$$\begin{aligned}
U \circ (\lambda^{G/N} \otimes T)_{\iota(f)}(v \otimes w \otimes x) &= U\left(\lambda^{G/N}_{tN}(v) \otimes \int_N (\lambda^G \otimes R)_{f(tn)}(w \otimes x)\, dn\right)\\
&= U\left(\int_N \lambda^{G/N}_{tN}(v) \otimes \lambda^G_{tn}(w) \otimes R_{f(tn)}(x)\, dn\right)\\
&= \int_N U\left(\lambda^{G/N}_{tN}(v) \otimes \lambda^G_{tn}(w) \otimes R_{f(tn)}(x)\right)\, dn\\
&= \int_N \lambda^G_{tn}(w) \otimes \lambda^{G/N}_{tN}(v) \otimes R_{f(tn)}(x)\, dn\\
&= \int_N \lambda^G_{tn}(w) \otimes S_{f(tn)}(v \otimes x)\, dn\\
&= \int_N (\lambda^G \otimes S)_{f(tn)}(w \otimes v \otimes x)\, dn\\
&= (\lambda^G \otimes S)^{\Phi^{\Psi}}{}_{\iota(f)} \circ U(v \otimes w \otimes x).
\end{aligned}$$

Con esto mostramos que $\lambda^{G/N} \otimes T$ es unitariamente equivalente a $S' = (\lambda^G \otimes S)^{\Phi^{\Psi}}$. En términos de R esto significa que $\lambda^{G/N} \otimes \left[(\lambda^G \otimes R)^{\Phi}\right]^{\Psi}$ es unitariamente equivalente a $(\lambda^G \otimes \lambda^{G/N} \otimes R)^{\Phi^{\Psi}}$.

Asumamos que $R|_{\mathcal{B}_e}$ es inyectiva, en cuyo caso también lo es $(\lambda^G \otimes R)|_{\mathcal{B}_e}$. Además [EN02] la forma integrada de $\lambda^{G/N} \otimes (\lambda^G \otimes R)^{\Phi^{\Psi}}$ se factoriza a través de $C^*_r(\mathcal{D})$. Entonces en las hipótesis del Teorema anterior (donde Ker es el núcleo):

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{D}} \subset Ker\left(\left[\lambda^{G/N} \otimes \left[(\lambda^G \otimes R)^{\Phi}\right]^{\Psi}\right]^{\sim}\right) &= Ker\left(\left[(\lambda^G \otimes \lambda^{G/N} \otimes R)^{\Phi^{\Psi}}\right]^{\sim}\right)\\
\subset \Psi \circ \Phi\left(Ker\left(\left[\lambda^G \otimes \lambda^{G/N} \otimes R\right]^{\sim}\right)\right) &= \Psi \circ \Phi(N_{\mathcal{B}}).
\end{aligned}$$

Observación 2.19. En caso que $(\lambda^G \otimes R)^{\Phi^{\Psi}}$ sea inyectiva en $\mathcal{D}_e$ las inclusiones anteriores son igualdades y $\Psi \circ \Phi$ es un $r-$isomorfismo.

Teorema 2.20. *Supongamos que H y K son grupos HLC y que $\mathcal{B}$ es un fibrado de Fell sobre $G := H \times K$. Si identificamos K con G/H, $\mathcal{B}|H$ es promediable y $\mathcal{D}$ se construye como en el Teorema anterior entonces $\mathcal{B}$ es $r-$isomorfo a $\mathcal{D}$.*

Demostración. Utilizaremos la Observación que hicimos antes del enunciado. Tomemos una $*-$representación $R\colon \mathcal{B} \to B(X)$ de manera que $R|_{\mathcal{B}_e}$ es no degenerada y fiel y sea $V\colon L^2(G) \to L^2(H) \otimes L^2(K)$ el isomorfismo canónico (de espacios de Hilbert). Recordemos que $\mathcal{C}_e = L^1(\mathcal{B}|H)$. Para toda $f \in C_c(\mathcal{B}|H)$, $u \otimes v \in L^2(H) \otimes L^2(K)$ y

$x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\lambda^G \otimes R)^{\Phi}_f \circ (V \otimes 1_X)^*(u \otimes v \otimes x) &= \int_H \lambda^G_{(t,e)}(uv) \otimes R_{f(t)} x \, dt = \int_H \lambda^H_t(u) v \otimes R_{f(t)} x \, dt \\ &= \int_H (\lambda^H_t(u) \otimes v \otimes R_{f(t)} x) \, dt \\ &= (V^* \otimes 1_X) \circ (\lambda^H \otimes (1_{L^2(K)} \otimes R))^{\sim}(u \otimes v \otimes x).\end{aligned}$$

Luego $(\lambda^G \otimes R)^{\Phi}|_{L^1(\mathcal{B}|H)}$ es unitariamente equivalente a $(\lambda^H \otimes (1_{L^2(K)} \otimes R))^{\sim}|_{L^1(\mathcal{B}|H)}$.

Dado que $\mathcal{B}|H$ es promediable y que $(1_{L^2(K)} \otimes R)|_{\mathcal{B}_e}$ es inyectiva, $(\lambda^G \otimes R)^{\Phi}|_{L^1(\mathcal{B}|H)}$ define la norma universal (y la reducida) en $L^1(\mathcal{B}|H) = \mathcal{C}_e$. Esto implica que $\mathcal{D}_e = C^*(\mathcal{B}|H)$ y que $(\lambda^G \otimes R)^{\Phi^{\Psi}}|_{\mathcal{D}_e}$ es inyectiva (porque es la única extensión de $(\lambda^G \otimes R)^{\Phi}|_{L^1(\mathcal{B}|H)}$). □

2.4. C*-acciones parciales que conmutan

Utilizaremos los resultados de la sección anterior, en especial el último, en los teoremas de imprimitividad. En aquellos teoremas tenemos acciones parciales que conmutan.

Proposición 2.21. *Si γ y δ son acciones parciales en módulos de Hilbert de H y K en $\mathcal{X}_A$, respectivamente, y γ conmuta con δ entonces valen las siguientes afirmaciones*

1. *γ^r conmuta con δ^r y, por otro lado, γ^l conmuta con δ^l.*
2. *$\gamma\delta$ es una acción parcial en módulos de Hilbert de $H \times K$ en $\mathcal{X}$ y $\gamma^r\delta^r$ una acción parcial en C*-álgebras de $H \times K$ en A.*
3. *$(\gamma\delta)^r = \gamma^r\delta^r$ y $(\gamma\delta)^l = \gamma^l\delta^l$.*

Demostración. Recordemos que si I y J son ideales de A entonces $\mathcal{X}I \cap \mathcal{X}J = \mathcal{X}(IJ) = \mathcal{X}(I \cap J)$. Luego $X^H_s \cap X^K_t = \mathcal{X}(A^H_s \cap A^K_t)$, para todo $(s,t) \in H \times K$.

Veamos que $\alpha := \gamma^r$ conmuta con $\beta := \delta^r$. Observemos que para cada $s \in H$ y $t \in K$:

$$\begin{aligned}\alpha_s(A^H_{s^{-1}} \cap A^K_t) &= \overline{\operatorname{span}}\, \alpha_s(\langle \mathcal{X}^H_{s^{-1}} A^K_t, \mathcal{X}^H_{s^{-1}} A^K_t \rangle) = \overline{\operatorname{span}}\, \langle \gamma_s(\mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_t), \gamma_s(\mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_t) \rangle \\ &= \overline{\operatorname{span}}\, \langle \mathcal{X}^H_s \cap \mathcal{X}^K_t, \mathcal{X}^H_s \cap \mathcal{X}^K_t \rangle = A^H_s \cap A^K_t.\end{aligned}$$

Esto muestra que cada A^K_t es $\alpha-$invariante y por simetría tenemos que cada A^H_s es $\beta-$invariante. Por otro lado, como $\langle \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}, \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}} \rangle$ genera un subespacio denso de $A^H_{s^{-1}} \cap A^K_{t^{-1}}$ y para todo $x, y \in \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}$ se cumple que

$$\beta_t(\alpha_s(\langle x, y \rangle)) = \langle \delta_t(\gamma_s(x)), \delta_t(\gamma_s(y)) \rangle = \alpha_s(\beta_t(\langle x, y \rangle));$$

deducimos que $\beta_t(\alpha_s(a)) = \alpha_s(\beta_t(a))$, para todo $a \in A^H_{s^{-1}} \cap A^K_{t^{-1}}$. Con esto mostramos que α conmuta con β.

Observemos que γ conmuta con δ si y solamente si $\widetilde{\gamma}$ conmuta con $\widetilde{\delta}$. Por lo tanto, de lo visto antes, se deduce que $\gamma^l = \widetilde{\gamma}^r$ conmuta con $\delta^l = \widetilde{\delta}^r$.

Veamos ahora que $\{X^H_s \cap X^K_t\}_{(s,t)\in H\times K}$ es una familia continua o, lo que es lo mismo, que $\{A^G_s \cap A^H_t\}_{(s,t)\in H\times K}$ es una familia continua. Dadas $f \in C^\alpha_c(H, A)$ y $g \in C^\beta_c(K, A)$ definamos $[f, g]\colon H \times K \to A$ como $[f, g](s, t) = f(s)g(t)$. Luego $S := \{[f, g]\colon f \in C^\alpha_c(H, A),\ g \in C^\beta_c(K, A)\}$ es una familia de $\{A^H_s \cap A^K_t\}_{(s,t)\in H\times K}$−secciones continuas. Además para cada $(s, t) \in H \times K$ se cumple que $S(s, t) = C^\alpha_c(H, A)(s)C^\beta_c(K, A)(t) = A^G_s A^H_t = A^G_s \cap A^H_t$. Por lo tanto $\{A^H_s \cap A^K_t\}_{(s,t)\in H\times K}$ es una familia continua.

Para mostrar que $\gamma\delta$ es una acción parcial en módulos de Hilbert tan sólo debemos ver (Lema 1.15) que cada $(\gamma\delta)_{(s,t)}$ es un homomorfismo de módulos de Hilbert, lo que se deduce inmediatamente del hecho de que γ_s y δ_t son homomorfismos de módulos de Hilbert. Un argumento análogo (para homomorfismos de C*-álgebras) se usa para mostrar que $\alpha\beta$ es una acción parcial en C*-álgebras.

Para mostrar que $(\gamma\delta)^r = \gamma^r\delta^r$ notemos que ambas acciones tienen el mismo dominio y que si $x, y \in \langle \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}, \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}\rangle$ entonces

$$(\gamma\delta)^r_{(s,t)}(\langle x, y\rangle) = \langle \delta_t(\gamma_s(x)), \delta_t(\gamma_s(y))\rangle = \beta_t(\alpha_s\langle x, y\rangle) = (\beta\alpha)_{(s,t)}(\langle x, y\rangle).$$

Esto muestra que $(\gamma\delta)^r_{(s,t)}$ coincide con $(\beta\alpha)_{(s,t)}$ en $\langle \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}, \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}\rangle$. Como ambas funciones son continuas y lineales y $\langle \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}, \mathcal{X}^H_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}^K_{t^{-1}}\rangle$ genera un subespacio denso de $A^H_{s^{-1}} \cap A^K_{t^{-1}}$, $(\gamma\delta)^r_{(s,t)} = (\beta\alpha)_{(s,t)}$. Con esto mostramos que $(\gamma\delta)^r = \beta\alpha$.

Con respecto al lado izquierdo tenemos que $(\gamma\delta)^l = (\widetilde{\gamma\delta})^r = (\widetilde{\gamma}\widetilde{\delta})^r = \widetilde{\gamma}^r\widetilde{\delta}^r = \gamma^l\delta^l$. □

Supongamos, por el resto de esta sección, que α y β son C*-acciones parciales que conmutan de H y K en A. Con ellas construiremos acciones parciales de K en $A \rtimes_\alpha H$ y en $A \rtimes_{\alpha,r} H$.

La Proposición 2.9 nos dice que para cada $t \in K$ el fibrado de Fell correspondiente a la restricción $\alpha|_{A^K_t}$, $\mathcal{B}\alpha|_{A^K_t}$, es un ideal del fibrado $\mathcal{B}\alpha$. También nos indica cómo identificar el producto cruzado (pleno y reducido) de $\alpha|_{A^K_t}$ como un ideal del producto cruzado (pleno, reducido) de α. De ahora en más usaremos esa identificación.

Modificamos levemente la notación de productos cruzados para escribir

$$A^K_t \rtimes_\alpha H = C^*(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_t}) \text{ y } A^K_t \rtimes_{r,\alpha} H = C^*_r(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_t}).$$

Intencionalmente omitimos escribir $\alpha|_{A^K_t}$ en lugar de α en el subíndice de $\rtimes$ porque de lo contrario la notación queda muy cargada y el ideal A^K_t aparece repetido. Así, en general, $B \rtimes_\beta H$ significa $B \rtimes_{\beta|_B} H$, y lo mismo para el producto cruzado reducido.

Continuando con las acciones parciales que conmutan observamos que para cada $t \in K$ existe un único isomorfismo de fibrados de Fell (Ejemplo 2.2) $\rho_t\colon \mathcal{B}\alpha|_{A^K_{t^{-1}}} \to \mathcal{B}\alpha|_{A^K_t}$ de manera que $\rho_t(a\delta_s) = \beta_t(a)\delta_s$. Luego existen únicos isomorfismos

$$\widetilde{\beta}_t\colon C^*(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_{t^{-1}}}) \to C^*(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_{t^{-1}}}) \text{ y } \widetilde{\beta}_t^{\,r}\colon C^*_r(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_{t^{-1}}}) \to C^*_r(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_{t^{-1}}})$$

de forma que $\widetilde{\beta}_t(f) = \widetilde{\beta}_t^{\,r}(f) = \rho_t \circ f$, para toda $f \in C_c(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_{t^{-1}}})$.

Teorema 2.22. *Supongamos que α y β son C*-acciones parciales que conmutan de H y K en A. Pensando a $\{A^K_t \rtimes_\alpha H\}_{t\in K}$ como una familia de ideales de $A \rtimes_\alpha H$ y a $\{A^K_t \rtimes_{r,\alpha} H\}_{t\in K}$ como una familia de ideales de $A \rtimes_{r,\alpha} H$ tenemos que $\widetilde{\beta} = \Big(\{A^K_t \rtimes_\alpha H\}_{t\in K}, \{\widetilde{\beta}_t\}_{t\in K}\Big)$ y $\widetilde{\beta}^r = \Big(\{A^K_t \rtimes_{r,\alpha} H\}_{t\in K}, \{\widetilde{\beta}_t^{\,r}\}_{t\in K}\Big)$ son acciones parciales en C*-álgebras.*

Demostración. Recordemos [FD88, VIII 12] que existe un único $*-$homomorfismo inyectivo $\phi\colon A \to M(A \rtimes_\alpha H)$ de manera que $\phi(a)f(s) = a\delta_e f(s)$, para toda $f \in C_c(\mathcal{B}\alpha)$. Si $f \in C_c(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_t})$ y $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de A^K_t entonces $\{\phi(e_i)f\}_i$ converge en la topología del límite inductivo a f. Esto implica que $A^K_t \rtimes_\alpha H = \phi(A^K_t)A \rtimes_\alpha H$. Además

$$\phi(A^K_t \cap A^K_s)A \rtimes_\alpha H = (A^K_t \cap A^K_s) \rtimes_\alpha H = (A^K_t \rtimes_\alpha H) \cap (A^K_s \rtimes_\alpha H),$$

por lo que $C_c(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_t A^K_s})$ es denso en $(A^K_t \rtimes_\alpha H) \cap (A^K_s \rtimes_\alpha H)$.

Dadas $f \in C^\beta_c(K, A)$ y $g \in C^\alpha_c(G, A)$ definamos $[f, g]\colon K \to A \rtimes_\alpha H$ como $[f, g](t) = \phi(f(t))g\delta$. Luego $S := \{[f, g]\colon f \in C^\beta_c(K, A),\ g \in C^\alpha_c(G, A)\} \subset C_c(\mathcal{B}\alpha)$ es una familia de $\widetilde{\beta}$ secciones continuas y $S(t)$ es denso en $A^K_t \rtimes_\alpha H$, para todo $t \in G$. Por otro lado para cada $[f, g] \in S$ se tiene que la función $K \to C_c(\mathcal{B}\alpha)$, $t \mapsto \widetilde{\beta}_t([f, g](t^{-1}))$, es continua en la topología del límite inductivo y por lo tanto también con respecto a la C*-norma universal.

Fijemos $s, t \in K$ y $f \in (A^K_{s^{-1}t^{-1}} \rtimes_\alpha H) \cap (A^K_{s^{-1}} \rtimes_\alpha H)$. Existe una sucesión $\{f_n\}_n \subset C_c(\mathcal{B}\alpha|_{A^K_{s^{-1}t^{-1}} A^K_{s^{-1}}})$ que converge a f. Tomemos $\{g_n\}_n \subset C_c^{\alpha|_{A^K_{s^{-1}t^{-1}} A^K_{s^{-1}}}}(K, A)$ tal que $f_n = g_n\delta$. Para cada natural n y $z \in H$: $\widetilde{\beta}_s(f_n)(z) = \beta_s(g_n(z))\delta_z$. Como $\beta_s(g_n(z)) \in A^K_{t^{-1}}$ tenemos que $\{\widetilde{\beta}_s(f_n)\}_n \subset A^K_{t^{-1}} \rtimes_\alpha H$. Tomando límite en n deducimos que $\widetilde{\beta}_s(f) \in A^K_{t^{-1}} \rtimes_\alpha H$. Por otro lado $\widetilde{\beta}_t(\widetilde{\beta}_s(f_n))(z) = \beta_t(\beta_s(g_n(z)))\delta_z = \beta_{ts}(g_n(z))\delta_z = \widetilde{\beta}_{ts}(f_n)(z)$, por lo que $\widetilde{\beta}_t(\widetilde{\beta}_s(f)) = \lim_n \widetilde{\beta}_t(\widetilde{\beta}_s(f_n)) = \lim_n \widetilde{\beta}_{ts}(f_n) = \widetilde{\beta}_{ts}(f)$. Esto termina de mostrar que $\widetilde{\beta}$ es una acción parcial en C*-álgebras.

Con respecto a $\widetilde{\beta}^r$ basta usar lo anterior combinado con la representación regular de $C^*(\mathcal{B})$. Por ejemplo, considerando la familia $\widetilde{\Lambda}S := \{\widetilde{\Lambda} \circ u \colon u \in S\}$ y lo visto antes es inmediato que la familia $\{A_t^K \rtimes_{r,\alpha} H\}_{t\in K} = \{\widetilde{\Lambda}(A_t^K \rtimes_\alpha H)\}_{t\in K}$ es continua. Por otro lado, si $s,t \in K$ y $f \in (A^K_{s^{-1}t^{-1}} \rtimes_{r,\alpha} H) \cap (A^K_{s^{-1}} \rtimes_{r,\alpha} H)$ entonces existe $f' \in (A^K_{s^{-1}t^{-1}} \rtimes_\alpha H) \cap (A^K_{s^{-1}} \rtimes_\alpha H)$ tal que $\widetilde{\Lambda}(f') = f$. Luego $\widetilde{\beta_s}^r(f) = \widetilde{\Lambda}(\widetilde{\beta_s}(f)) \in A^K_{t^{-1}} \rtimes_{r,\alpha} H$ y $\widetilde{\beta_t}^r(\widetilde{\beta_s}^r(f)) = \widetilde{\Lambda}(\widetilde{\beta_{ts}}(f')) = \widetilde{\beta_{ts}}^r(f)$. Finalmente es inmediato que para cada $v = \lambda \circ u \in \widetilde{\Lambda}S$ la función $K \mapsto A \rtimes_{r,\alpha} H$, $t \mapsto \widetilde{\beta}_t(v(s^{-1})) = \widetilde{\Lambda}(\widetilde{\beta}_t(u(t^{-1})))$, es continua. □

Relacionado con los teoremas de la sección anterior tenemos el que sigue.

Teorema 2.23. *Supongamos que α y β son C^*-acciones parciales que conmutan, de H y K en A, y que $\widetilde{\beta}$ es la acción parcial dada en el teorema anterior. Entonces, por un lado, $A \rtimes_{\alpha\beta} (H \times K)$ es isomorfo a $(A \rtimes_\alpha H) \rtimes_{\widetilde{\beta}} K$ y, por otro, $A \rtimes_{r,\alpha\beta} (H \times K)$ es isomorfo a $(A \rtimes_{r,\alpha} H) \rtimes_{r,\widetilde{\beta}^r} K$. Si α es promediable entonces $\alpha\beta$ es $r-$isomorfa a $\widetilde{\beta}$.*

Demostración. Para simplificar la notación escribiremos $\mathcal{B}$ en lugar de $\mathcal{B}\alpha\beta$. Como en el Teorema 2.20, pensaremos a H como un subgrupo normal y cerrado de $G = H \times K$ e identificaremos K con G/H canónicamente. Construyamos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ a partir de $\mathcal{B}$ tal como en el enunciado del Teorema 2.18. La primera parte de la prueba estará completa si logramos mostrar que $\mathcal{D}$ es isomorfo, como fibrado de Fell, a $\mathcal{B}\widetilde{\beta}$.

Si observamos la construcción de $\mathcal{C}$ a partir de $\mathcal{B}$ en [FD88] notamos que la fibra $\mathcal{C}_t = L^1(\mathcal{B}|H \times \{k\})$ $(t \in K)$ se identifica naturalmente con $L^1(\mathcal{B}\alpha|_{A_t^K})\delta_t \subset (\mathcal{B}\widetilde{\beta})_t$. Esto nos da un mapa lineal $\nu_t \colon \mathcal{C}_t \to \mathcal{B}\widetilde{\beta}_t$. Definimos $\nu \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}\widetilde{\beta}$ de manera que $\nu|_{\mathcal{C}_t} = \nu_t$.

Para mostrar que ν es continuo usaremos [FD88, II 13.16]. El hecho de que ν_t sea una contracción se debe a que si $f \in L^1(\mathcal{B}\alpha|_{A_t^K})$ entonces la norma de $f\delta_t \in \mathcal{B}\widetilde{\beta}$ es $\|f\|_{C^*(\mathcal{B}\alpha)}$ la cual es menor o igual a $\|f\|_1 = \|f\|_{\mathcal{C}_t}$. Dada $f \in C_c(\mathcal{B})$ definamos $\widetilde{f} \in C_c(\mathcal{C})$ como $\widetilde{f}(t) = f|_{H\times\{t\}}$. Como conjunto de secciones Γ del enunciado [FD88, II 13.16] tomemos $\Gamma := \{\widetilde{f} \colon f \in C_c(\mathcal{B})\}$. Notemos que Γ cumple las condiciones requeridas porque define la topología de $\mathcal{C}$ [FD88, VIII 6]. Calculemos $\nu \circ \widetilde{f}$ para $f \in C_c(\mathcal{B})$. Sabemos que existe una única $g \in C_c^{\alpha\beta}(H \times K, A)$ tal que $f = g\delta$. Luego $\nu \circ \widetilde{f}(t) = \nu_t(\widetilde{f}(t)) = g|_{H\times\{t\}}\delta_t$. Como g tiene soporte compacto y es continua, la función $K \to C_c(\mathcal{B}\alpha)$, $t \mapsto g|_{H\times\{t\}}$, es continua en la topología del límite inductivo; lo que implica que $\nu \circ \widetilde{f}$ es continua. Con esto terminamos de mostrar que ν es continua.

En este punto es conveniente reproducir parte de la construcción de $\mathcal{D}$ a partir de $\mathcal{C}$. Recordemos que se define $\| \, \|_c\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ como

$$\|a\|_c := \sup\{\|T_a\|\colon T \text{ es una } *-\text{representación de } \mathcal{C}\},$$

y que $\| \, \|_c$ es una norma en $\mathcal{C}$ dominada por la norma de $\mathcal{C}$. Para cada $t \in K$ definimos $N_t := \{a \in \mathcal{C}_t\colon \|a\|_c = 0\}$. Luego $\mathcal{D}_t$ es la completación de Hausdorff del espacio normado $\mathcal{C}_t/N_t$ (con la norma cociente de $\| \, \|_c$). Esto nos da un mapa canónico contractivo $\iota\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Es evidente que $\iota(\mathcal{C}_t)$ es denso en $\mathcal{D}_t$. Las operaciones en $\mathcal{D}$ se definen canónicamente, de manera que ι es multiplicativo, lineal y preserva la involución. La topología de $\mathcal{D}$ se define por la familia de secciones $\{\iota \circ u\colon u \in C_c(\mathcal{C})\}$.

Tomemos una representación $T\colon \mathcal{B}\widetilde{\beta} \to B(X)$ de manera que $T|_{(\mathcal{B}\widetilde{\beta})_e}$ es inyectiva, lo que implica que es isométrica en cada fibra. Luego $T \circ \nu$ es una $*-$representación de $\mathcal{C}$ y existe una única $*-$representación $T'\colon \mathcal{D} \to B(Y)$ tal que $T' \circ \iota = T \circ \nu$. Para todo $a \in \mathcal{C}$ se tiene $\|\nu(a)\| = \|T \circ \nu(a)\| = \|T' \circ \iota(a)\| \leq \|\iota(a)\|$, por lo que existe una única función $\nu'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{B}\widetilde{\beta}$ tal que $\nu'(\mathcal{D}_t) \subset (\mathcal{B}\widetilde{\beta})_t$ (para todo $t \in K$) y $\nu' \circ \iota = \nu$. Luego ν' es multiplicativa, lineal en cada fibra y preserva la involución. Además ν' es contractiva. Observemos que si $\Gamma' := \{\iota \circ f\colon f \in \Gamma\}$ entonces para cada $t \in K$, $\Gamma'(t)$ es denso en $\mathcal{D}_t$ y para cada $g = \iota \circ f \in \Gamma'$, tenemos que $\nu' \circ g = \nu \circ f$ es una sección continua de $\mathcal{B}\widetilde{\beta}$. Luego [FD88, II 13.15] ν' es continua.

Observemos que $\nu'(\mathcal{D}_t) \supset \nu(\mathcal{C}_t)$ y $\nu(\mathcal{C}_t) = L^1(\mathcal{B}\alpha|_{A_t^K})\delta_t$ es denso en $\mathcal{B}\widetilde{\beta}_t$. Por lo tanto $\nu'(\mathcal{D}_t)$ es denso en $\mathcal{B}\widetilde{\beta}_t$. Si logramos mostrar que $\nu'|_{\mathcal{D}_e}$ es una isometría entonces ν' es una isometría (porque tanto $\mathcal{D}$ como $\mathcal{B}\widetilde{\beta}$ son fibrados de Fell). Esto implicará que ν' es biyectiva y, por [FD88, II 13.17], ν' es un isomorfismo de fibrados de Fell. A su vez, esto último junto con el Teorema 2.18 y la Proposición 2.15 implicará que $A \rtimes_{\alpha\beta} (H \times K) = C^*(\mathcal{B}\alpha\beta)$ es isomorfo a $C^*(\mathcal{D}) = C^*(\mathcal{B}\widetilde{\beta}) = (A \rtimes_\alpha H) \rtimes_{\widetilde{\beta}} K$; lo que probará la primera afirmación del enunciado.

La clave es mostrar que $\nu'|_{\mathcal{D}_e}$ es una isometría. Por construcción $\mathcal{D}_e$ es la completación de $\mathcal{C}_e = L^1(\mathcal{B}|H) = L^1(\mathcal{B}\alpha)$ con respecto a la C*-norma $\| \, \|_c$. Por otro lado $(\mathcal{B}\widetilde{\beta})_e$ es la completación de $\mathcal{C}_e = L^1(\mathcal{B}\alpha)$ con respecto a su C*-norma universal, que llamaremos $\| \, \|_u$. Tenemos que mostrar que $\| \, \|_c|_{\mathcal{C}_e} = \| \, \|_u$. En [FD88, XI 11] se dan condiciones suficientes para la igualdad. En el lenguaje de aquel texto debemos mostrar que toda $*-$representación de $\mathcal{C}_e$ es $\mathcal{C}-$positiva. Específicamente nos gustaría usar [FD88, XI 11.19] pero no podemos porque nuestros fibrados no serán saturados, a menos que las acciones sean globales. Afortunadamente podemos modificar aquella prueba para adaptarla a nuestro caso.

Fijemos una $*-$representación $S\colon \mathcal{C}_e = L^1(\mathcal{B}\alpha) \to B(X)$ y elementos $t \in K$, $b_1, \ldots, b_n \in L^1(\mathcal{B}\alpha|_{A_t^K})$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Escribiremos $b_k\delta_t$ cuando pensemos a b_k como elemento de $\mathcal{C}_t$. Si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $L^1(\mathcal{B}\alpha|_{A_{t^{-1}}^K})$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j,l=1}^{n} \langle S_{(b_j\delta_t)^*(b_l\delta_t)} x_l, x_j\rangle &= \lim_i \sum_{j,l=1}^{n} \langle S_{(b_j\delta_t)^* e_i\delta_{t^{-1}} (e_i\delta_{t^{-1}})^* b_l\delta_t} x_l, x_j\rangle \\ &= \lim_i \sum_{j,l=1}^{n} \langle S_{(e_i\delta_{t^{-1}})^* b_l\delta_t} x_l, S_{(e_i\delta_{t^{-1}})^* b_j\delta_t} x_j\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Apelando a la demostración de [FD88, XI 11.19] vemos que esta desigualdad implica que $\| \, \|_c|_{\mathcal{C}_e} = \| \, \|_u$. Esto muestra que ν' es una isometría.

Asumamos, sólo en este párrafo, que α es promediable, lo que equivale a que $\mathcal{B}|H$ sea promediable. Luego el $r-$isomorfismo entre $\alpha\beta$ y $\widetilde{\beta}$ se deduce de lo que probamos hasta aquí y del Teorema 2.20.

La última parte de la prueba consiste en encontrar un isomorfismo entre $A \rtimes_{r,\alpha\beta} (H \times K)$ y $(A \rtimes_{r,\alpha} H) \rtimes_{r,\widetilde{\beta}^r} K$. Tomemos una $*-$representación no degenerada $T\colon \mathcal{B} \to B(X)$ de manera que $T|_{\mathcal{B}_e}$ es inyectiva. Como $T|_{\mathcal{B}_e}$ es inyectiva, $A \rtimes_{r,\alpha\beta} (H \times K)$ es isomorfo a la clausura de $U := \int(\lambda^H \otimes \lambda^K \otimes T)(C_c(\mathcal{B}))$.

Recordemos el isomorfismo $\Phi\colon C^*(\mathcal{B}) \to C^*(L^1(\mathcal{C}))$ construido en la prueba del Teorema 2.18. Observemos que para toda $f \in C_c(\mathcal{B})$ se tiene que $\Phi(f) = \widetilde{f}$. Sea $T'\colon \mathcal{C} \to B(Y)$ la única $*-$representación de manera que $\int T' \circ \Phi = \int(\lambda^H \otimes T)$.

Sea $\nu^r\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}\widetilde{\beta}^r$ la única función tal que $\nu^r(f\delta_t) = f\delta_t$, para toda $f \in C_c(\mathcal{B}\alpha|_{A_t^K})$ y todo $t \in K$ (donde identificamos $\mathcal{C}_t$ con $L^1(\mathcal{B}\alpha|_{A_t^K})$). Con los mismos argumentos que mostramos que ν es continua, lineal y que preserva la involución y el producto; probamos que ν^r tiene las mismas propiedades. Notemos, además, que $\{\nu^r \circ \widetilde{f}\colon f \in C_c(\mathcal{B})\}$ es denso en la topología del límite inductivo en $C_c(\mathcal{B}\widetilde{\beta}^r)$.

Recordando los cálculos hechos antes del enunciado del Teorema 2.20 e identificando $\mathcal{C}_e$ con $L^1(\mathcal{B}\alpha)$ vemos que $T'|_{\mathcal{C}_e} = \lambda^H \otimes (T|_{\mathcal{B}|H})$. Dado que $T|_{\mathcal{B}|H}|_{\mathcal{B}|H_e} = T|_{\mathcal{B}_e}$ es inyectiva, la norma definida por T' en $\mathcal{C}_e = L^1(\mathcal{B}\alpha)$ es la C*-norma reducida. Luego existe una única $*-$representación $T''\colon \mathcal{B}\widetilde{\beta}^r \to B(X)$ de manera que $T'' \circ \nu^r = T'$. Observemos que, por definición, $T''|_{[\mathcal{B}\widetilde{\beta}^r]_e}$ es inyectiva y por lo tanto $(A \rtimes_{r,\alpha} H) \rtimes_{r,\widetilde{\beta}^r} K$ es isomorfo a la clausura de $V := \int \lambda^K \otimes T''(\{\nu^r \circ \widetilde{f}\colon f \in C_c(\mathcal{B})\})$. Por otra parte, para toda $f \in C_c(\mathcal{B})$

y $x \in X$ se cumple que

$$\begin{aligned}\int \lambda^K \otimes T''(\nu^r \circ \widetilde{f})x &= \int_K (\lambda_t^K \otimes T'_{\widetilde{f}(t)})x\, d\mu_K(t)\\ &= \int_K \int_H (\lambda_t^K \otimes \lambda_s^H \otimes T_{f(s,t)})x\, d\mu_H(s) d\mu_K(t)\\ &= \int (\lambda^K \otimes \lambda^H \otimes T)(f)x.\end{aligned}$$

Esto implica que $U = V$. Como $\overline{U}$ es isomorfo a $A \rtimes_{r,\alpha\beta} (H \times K)$ y $\overline{V}$ a $(A \rtimes_{r,\alpha} H) \rtimes_{r,\widetilde{\beta}^r} K$, la igualdad $U = V$ implica el isomorfismo que buscábamos. $\square$

Corolario 2.24. *Si α y β son C*-acciones parciales que conmutan, de H y K en A, entonces $(A \rtimes_\alpha H) \rtimes_{\widetilde{\beta}} K$ es isomorfa a $(A \rtimes_\beta K) \rtimes_{\widetilde{\alpha}} H$ y, por otro lado, $(A \rtimes_{r,\alpha} H) \rtimes_{r,\widetilde{\beta}^r} K$ es isomorfa a $(A \rtimes_{r,\beta} K) \rtimes_{r,\widetilde{\alpha}^r} H$.*

Demostración. Observemos que el fibrado $\mathcal{B}\alpha\beta$ es la retracción de $\mathcal{B}\beta\alpha$ por el isomorfismo $\phi\colon H \times K \to K \times H$, $\phi(s,t) = (t,s)$; lo que nos coloca en la situación del Ejemplo 2.1 y de la Proposición 2.15. Luego $\mathcal{B}\alpha\beta$ es $r-$isomorfo a $\mathcal{B}\beta\alpha$. Estos argumentos formalizan otro más directo: $\alpha\beta = \beta\alpha$ si pensamos $H \times K = K \times H$.

Por un lado $(A \rtimes_\alpha H) \rtimes_{\widetilde{\beta}} K$ es isomorfa a $A \rtimes_{\alpha\beta} (H \times K)$, que por lo visto antes es isomorfa a $A \rtimes_{\beta\alpha} (K \times H)$; que a su vez es isomorfo a $(A \rtimes_\beta K) \rtimes_{\widetilde{\alpha}} H$.

La afirmación sobre los productos cruzados reducidos se demuestra análogamente. $\square$

2.5. Equivalencia de Morita de Fibrados de Fell

Nuestros Teoremas de Imprimitividad para acciones parciales propias (Capítulo 5) se basarán en Teoremas de equivalencia de Morita entre C*-álgebras de secciones de fibrados de Fell, resultados que obtendremos usando fibrados que llamaremos “módulos de Fell-Hilbert”.

2.5.1. Fibrados de módulos

La utilización de la teoría de fibrados de Fell simplifica muchos argumentos al momento de trabajar con acciones parciales en C*-álgebras. Queremos desarrollar una teoría de fibrados de módulos de Hilbert que nos permita manipular las acciones parciales en módulos de Hilbert con facilidad. Afortunadamente no debemos inventar los objetos de la nada sino utilizar los definidos por otros autores. El lector podrá notar que la siguiente definición es casi igual a la Definición 2.13 de [BM13]. Para fibrados sobre grupoides el lector puede consultar [Yam91, Muh01, MW08].

Supongamos que $\mathcal{B}$ es un fibrado de Fell sobre el grupo G, ambos fijos para el resto de esta sección.

Definición 2.25. Un $\mathcal{B}-$módulo de Fell-Hilbert (a derecha) es un fibrado de Banach $\mathcal{E}$ sobre G junto con dos operaciones continuas: el producto interno $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{B}$, $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$, y la acción a derecha $\mathcal{E}\times\mathcal{B}\to\mathcal{E}$, $(x,a)\mapsto xa$, de forma que:

1. $\langle\mathcal{E}_s,\mathcal{E}_t\rangle\subset\mathcal{B}_{s^{-1}t}$ y $\mathcal{E}_s\mathcal{B}_t\subset\mathcal{E}_{st}$, para todo $s,t\in G$.
2. La restricción de la acción a derecha a cada producto de fibras $\mathcal{E}_s\times\mathcal{B}_t$ es lineal en ambas variables.
3. La restricción del producto interno a cada producto de fibras $\mathcal{E}_s\times\mathcal{E}_t$ es lineal en la segunda variable.
4. Para todo $x,y\in\mathcal{E}$ y $a\in\mathcal{B}$ se cumple que $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$ y que $\langle x,ya\rangle=\langle x,y\rangle a$.
5. $\langle x,x\rangle\geq 0$ en $\mathcal{B}_e$ para todo $x\in\mathcal{E}$.
6. $\|x\|^2=\|\langle x,x\rangle\|$ para todo $x\in X$.

Ejemplo 2.3. $\mathcal{B}$ es un $\mathcal{B}-$módulo a derecha con la multiplicación como acción a derecha y el producto interno $\langle a,b\rangle:=a^*b$.

Definición 2.26. Se dice que $\mathcal{E}$ es pleno (a derecha) si para todo $t\in G$ se cumple que $\operatorname{span}\{\langle x,y\rangle\colon x\in\mathcal{E}_s,\ y\in\mathcal{E}_{st},\ s\in G\}$ es denso en $\mathcal{B}_t$.

La definición del módulo de Fell-Hilbert a izquierda es análoga a la anterior, con unas pequeñas variantes:

Definición 2.27. Un $\mathcal{B}-$módulo de Fell-Hilbert (a izquierda) es un fibrado de Banach $\mathcal{E}$ sobre G junto con dos operaciones continuas: el producto interno $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{B}$, $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$, y la acción a izquierda $\mathcal{B}\times\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, $(a,x)\mapsto ax$, de forma que:

1. $\langle\mathcal{E}_s,\mathcal{E}_t\rangle\subset\mathcal{B}_{st^{-1}}$ y $\mathcal{B}_s\mathcal{E}_t\subset\mathcal{E}_{st}$, para todo $s,t\in G$.
2. La restricción de la acción a izquierda a cada producto de fibras $\mathcal{B}_s\times\mathcal{E}_t$ es lineal en ambas variables.
3. La restricción del producto interno a cada producto de fibras $\mathcal{E}_s\times\mathcal{E}_t$ es lineal en la primer variable.
4. Para todo $x,y\in\mathcal{E}$ y $a\in\mathcal{B}$ se cumple que $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$ y que $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$.

5. $\langle x, x\rangle \geq 0$ en $\mathcal{B}_e$ para todo $x \in \mathcal{E}$.

6. $\|x\|^2 = \|\langle x, x\rangle\|$ para todo $x \in X$.

Definición 2.28. Un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$ es un fibrado de Banach que es un $\mathcal{A}-$fibrado de Fell-Hilbert a izquierda, un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert a derecha y para todo $x, y, z \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$ se cumplen las siguientes igualdades

$$(ax)b = a(xb); \ {}_{\mathcal{A}}\langle x, y\rangle z = x\langle y, z\rangle_{\mathcal{B}}; \ {}_{\mathcal{A}}\langle x, yb\rangle = {}_{\mathcal{A}}\langle xb^*, y\rangle \text{ y } \langle ax, y\rangle_{\mathcal{B}} = \langle x, a^* y\rangle_{\mathcal{B}}.$$

En esta situación diremos que $\mathcal{E}$ es pleno si es pleno a derecha e izquierda.

A continuación haremos algunos comentarios para fibrados de Fell-Hilbert a derecha, el lector puede deducir la respectiva observación para fibrados a izquierda realizando las modificaciones correspondientes.

Observación 2.29. Todo fibrado de Fell-Hilbert puede hacerse un fibrado de Fell-Hilbert pleno a derecha de la siguiente manera: supongamos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert a derecha. Definamos, para cada $t \in G$, $\mathcal{A}_t := \overline{\mathrm{span}}\,\{\langle x, y\rangle \colon x \in \mathcal{E}_s,\ y \in \mathcal{E}_{st},\ t \in G\}$. Afirmamos que $\mathcal{A} := \cup_{t\in G}\mathcal{A}_t$ es un sub-fibrado de Fell de $\mathcal{B}$. Es inmediato que $\mathcal{A}$ es cerrado por la suma, producto por escalares, la involución y el producto de $\mathcal{B}$. Consideremos la familia de $\mathcal{A}-$secciones Γ formada por las funciones de la forma $t \mapsto \sum_{j=1}^{n}\langle f_j(s), g_j(st)\rangle$, siendo $f_j, g_j \in C_c(\mathcal{E})$ $(j = 1, \ldots, n)$ y $s \in G$. Dado que $\mathcal{E}$ tiene suficientes secciones continuas se cumple que $\{f(t) \colon f \in \Gamma\}$ es denso en $\mathcal{A}_t$, para todo $t \in G$. Luego [FD88, II 13.18] existe una única estructura de fibrado de Banach en $\mathcal{A}$ con la cual los elementos de Γ son secciones continuas. Esa estructura debe ser la heredada de $\mathcal{B}$. Además es evidente que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{A}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno a derecha (con el producto interno y la acción a derecha heredadas).

De la última propiedad de la definición de módulo de Fell-Hilbert deducimos que $x \in \mathcal{E}_t$ es nulo sii $\langle x, y\rangle = 0$ $(\langle y, x\rangle = 0)$ para todo $y \in \mathcal{E}_t$. Esa propiedad y la asociatividad del producto de $\mathcal{B}$ implican la asociatividad de la acción a derecha: dados $x \in \mathcal{E}_r$, $a \in \mathcal{B}_s$ y $b \in \mathcal{B}_t$ se tiene que $x(ab), (xa)b \in \mathcal{E}_{rst}$ y para todo $y \in \mathcal{E}_{rst}$

$$\langle y, x(ab) - (xa)b\rangle = \langle y, x\rangle(ab) - \langle y, xa\rangle b = \langle y, x\rangle(ab) - (\langle y, x\rangle a)b = 0,$$

de lo que concluimos $x(ab) = (xa)b$.

La definición implica, directamente, que cada fibra $\mathcal{E}_t$ es un $\mathcal{B}_e-$módulo de Hilbert y también que para cada $x, y, z \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathcal{B}$:

$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \quad \text{y } \langle xa, y\rangle = a^*\langle x, y\rangle.$$

Observación 2.30. Para todo $x, y \in \mathcal{E}$ y $a \in \mathcal{B}$ se cumple que $\|xa\| \leq \|x\|\|a\|$ y que $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$.

Demostración. La primera desigualdad se deduce de que

$$\|xa\|^2 = \|\langle xa, xa\rangle\| = \|a^*\langle x, x\rangle a\| = \|\langle x, x\rangle^{1/2}a\|^2 \leq \|a\|^2\|\langle x, x\rangle\| = \|a\|^2\|x\|^2.$$

Para mostrar la segunda desigualdad observemos que si $\|\langle x, y\rangle\| = 0$ es evidente que $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$. En caso que $\|\langle x, y\rangle\| \neq 0$ digamos que $x \in \mathcal{E}_r$ e $y \in \mathcal{E}_s$. Como $x\langle x, y\rangle \in \mathcal{E}_s$ y $\mathcal{E}_s$ es un $\mathcal{B}_e-$módulo de Hilbert tenemos que

$$\|\langle x, y\rangle\|^2 = \|\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle\| = \|\langle x\langle x, y\rangle, y\rangle\| \leq \|x\langle x, y\rangle\|\|y\| \leq \|x\|\|y\|\|\langle x, y\rangle\|.$$

Luego $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|\frac{\|\langle x,y\rangle\|}{\|\langle x,y\rangle\|} = \|x\|\|y\|$. □

Proposición 2.31. *Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{A}-$fibrado de Fell-Hilbert a izquierda y un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert a derecha, siendo pleno a derecha e izquierda, entonces $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert si y solamente si para todo $x, y, z \in \mathcal{E}$ se cumple que ${}_{\mathcal{A}}\langle x, y\rangle z = x\langle y, z\rangle_{\mathcal{B}}$.*

Demostración. Para probar la primera igualdad de la Definición de arriba fijemos $r, s \in G$ y $x \in \mathcal{E}_t$. Definamos $R, S\colon \mathcal{A}_r \times \mathcal{B}_s \to \mathcal{E}_{rts}$ como $R(a, b) = a(xb)$ y $S(a, b) = (ax)b$. Luego R y S son lineales en cada variable y continuos; para mostrar que vale la primera igualdad de la Definición 2.28 ($R = S$) basta con probar que $R(a, b) = S(a, b)$, para todo $a = {}_{\mathcal{A}}\langle z, w\rangle$ y $b = \langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}}$. Esa igualdad se deduce de

$$\begin{aligned} R({}_{\mathcal{A}}\langle z, w\rangle, \langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}}) &= ({}_{\mathcal{A}}\langle z, w\rangle x)\langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}} = (z\langle w, x\rangle_{\mathcal{B}})\langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}} = z\langle w, x\langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} \\ &= {}_{\mathcal{A}}\langle z, w\rangle(x\langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}}) = S({}_{\mathcal{A}}\langle z, w\rangle, \langle z', w'\rangle_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

Utilizando argumentos similares al anterior deducimos que para mostrar la tercera igualdad de la Definición 2.28 basta con mostrar que ${}_{\mathcal{A}}\langle x, yb\rangle = {}_{\mathcal{A}}\langle xb^*, y\rangle$ para todo $b = \langle z, w\rangle_{\mathcal{B}}$. Eso se deduce de que

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{A}}\langle x, y\langle z, w\rangle_{\mathcal{B}}\rangle &= {}_{\mathcal{A}}\langle x, {}_{\mathcal{A}}\langle y, z\rangle w\rangle = {}_{\mathcal{A}}\langle x, w\rangle{}_{\mathcal{A}}\langle z, y\rangle = {}_{\mathcal{A}}\langle {}_{\mathcal{A}}\langle x, w\rangle z, y\rangle \\ &= {}_{\mathcal{A}}\langle x\langle w, z\rangle_{\mathcal{B}}, y\rangle = {}_{\mathcal{A}}\langle x\langle z, w\rangle_{\mathcal{B}}{}^*, y\rangle. \end{aligned}$$

La última igualdad se demuestra análogamente. □

Así como es posible construir un fibrado de Fell a partir de una acción parcial podemos construir un módulo de Fell-Hilbert a partir de una acción parcial en módulos de Hilbert.

Notación 2.32. En la teoría de acciones parciales es usual escribir $a\delta_s$ en lugar de (a,s) para denotar los elementos de $\mathcal{B}\alpha$. Para mantener esa convención escribiremos $x\delta_s$ en lugar de (x,s) $(x\in\mathcal{X}_s)$.

Teorema 2.33. *Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y llamemos α a γ^r. Luego el fibrado sobre G $\mathcal{E}\gamma := \{(x,t)\in\mathcal{X}\times G\colon x\in\mathcal{X}_t\}$ es un $\mathcal{B}\alpha-$fibrado de Fell-Hilbert pleno (a derecha) con la estructura de fibrado de Banach heredada del fibrado trivial $\mathcal{X}\times G\to G$ y las operaciones*

$$\langle x\delta_s, y\delta_t\rangle_r := \alpha_{s^{-1}}(\langle x,y\rangle_r)\delta_{s^{-1}t} \qquad x\delta_s a\delta_t := \gamma_s(\gamma_{s^{-1}}(x)a)\delta_{st}.$$

Demostración. El hecho de que $\mathcal{E}\gamma\to G,\ x\delta_s\mapsto s$, es un fibrado de Banach se deduce exactamente como en la construcción de los fibrados de Fell asociados a acciones parciales en C*-álgebras [Exe97].

Sea $\mathbb{L}(\gamma)$ la acción parcial de enlace de γ (Sección 3.2). Definamos $\iota_{\mathcal{X}}\colon\mathcal{E}\gamma\to\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$, $\iota_A\colon\mathcal{B}\alpha\to\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$, $P_{\mathcal{X}}\colon\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)\to\mathcal{E}\gamma$ y $P_A\colon\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)\to\mathcal{B}\alpha$ como $\iota_{\mathcal{X}}(x\delta_t) = \left(\begin{smallmatrix}0&x\\0&0\end{smallmatrix}\right)\delta_t$; $\iota_A(a\delta_t) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\delta_t$; $P_{\mathcal{X}}\left[\left(\begin{smallmatrix}T&x\\\tilde{y}&a\end{smallmatrix}\right)\delta_t\right] = x\delta_t$ y $P_A\left[\left(\begin{smallmatrix}T&x\\\tilde{y}&a\end{smallmatrix}\right)\delta_t\right] = a\delta_t$.

Con esta notación se verifica fácilmente que $\langle x\delta_s,y\delta_t\rangle_r = P_A(\iota_{\mathcal{X}}(x\delta_s)^*\iota_{\mathcal{X}}(y\delta_s))$ y $x\delta_s a\delta_t = P_{\mathcal{X}}(\iota_{\mathcal{X}}(x\delta_s)\iota_A(a\delta_t))$. Esto nos permite pensar a $\mathcal{E}\gamma$ y $\mathcal{B}\alpha$ como subfibrados de $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$. Pensando a este último como un fibrado de Fell-Hilbert sobre sí mismo deducimos inmediatamente que $\mathcal{E}\gamma$ es un $\mathcal{B}\alpha-$fibrado de Fell-Hilbert.

Ahora que sabemos que $\mathcal{E}\gamma$ es un fibrado de Fell-Hilbert veamos que es pleno a derecha. Recordemos que $A_t = \overline{\operatorname{span}}\,\langle\mathcal{X}_t,\mathcal{X}_t\rangle_r = \overline{\operatorname{span}}\,\langle\mathcal{X},\mathcal{X}_t\rangle_r$. Luego $\overline{\operatorname{span}}\,\mathcal{E}\gamma_e\mathcal{E}\gamma_t = \overline{\operatorname{span}}\,\langle\mathcal{X},\mathcal{X}_t\rangle_r\delta_t = \mathcal{B}\alpha_t$. □

Teorema 2.34. *En las hipótesis del Teorema anterior, si $B=\mathbb{K}(\mathcal{X})$ y $\beta:=\gamma^l$ entonces $\mathcal{E}\gamma$ es un $\mathcal{B}\beta-$fibrado de Fell-Hilbert pleno a izquierda con las operaciones*

$${}_l\langle x\delta_s, y\delta_t\rangle := \beta_s({}_l\langle\gamma_{s^{-1}}(x),\gamma_{t^{-1}}(y)\rangle)\delta_{st^{-1}} \ \text{ y } \ a\delta_s x\delta_t := \gamma_s(\beta_{s^{-1}}(a)x)\delta_{st}.$$

Demostración. Continuando con la notación de la prueba anterior definamos $\iota_B\colon\mathcal{B}\beta\to\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$ como $\iota_B(T\delta_r) = \left(\begin{smallmatrix}T&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\delta_r$. Luego ${}_l\langle x\delta_s,y\delta_t\rangle = P_B(\iota_{\mathcal{X}}(x\delta_s)\iota_{\mathcal{X}}(y\delta_s)^*)$ y $T\delta_r x\delta_s = P_{\mathcal{X}}(\iota_B(T\delta_r)\iota_{\mathcal{X}}(x\delta_s))$. Esto nos permite pensar a $\mathcal{E}\gamma$ y $\mathcal{B}\beta$ como subfibrados de $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$ y deducir la tesis fácilmente a partir de que $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$ es un $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)-\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)-$fibrado de Fell-Hilbert. □

Corolario 2.35. *Con la estructura de $\mathcal{B}\gamma^l-$fibrado a izquierda y $\mathcal{B}\gamma^r-$fibrado a derecha $\mathcal{E}\gamma$ es un $\mathcal{B}\gamma^l-\mathcal{B}\gamma^r-$fibrado de Fell-Hilbert pleno.*

Demostración. Se deduce inmediatamente observando las demostraciones de los resultados anteriores. □

Con respecto a los isomorfismos de fibrados de Fell-Hilbert nos bastará con lo siguiente.

Teorema 2.36. *Supongamos que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son un $\mathcal{A}$ y un $\mathcal{B}$ fibrado de Fell-Hilbert plenos sobre G, respectivamente, y que $\rho\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ es una función continua que satisface las siguientes condiciones:*

(a) Para todo $t \in G$, $\rho(\mathcal{E}_t) = \mathcal{F}_t$.

(b) ρ es inyectiva y lineal en cada fibra.

(c) Para todo $x, y, z \in \mathcal{E}$, $\rho(x\langle y, z\rangle) = \rho(x)\langle \rho(y), \rho(z)\rangle$.

Luego ρ es una isometría en cada fibra, su inversa satisface las propiedades (a)-(c) y existe un único morfismo de fibrados de Fell $\rho^r\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $\rho^r(\langle x, y\rangle) = \langle \rho(x), \rho(y)\rangle$, para todo $x, y \in \mathcal{E}$. Además ρ^r es un isomorfismo y $(\rho^r)^{-1} = (\rho^{-1})^r$.

Demostración. Si pensamos a las fibras $\mathcal{E}_t$ y a $\mathcal{F}_t$ como módulos de Hilbert sobre $\mathcal{A}_e$ y $\mathcal{B}_e$, respectivamente, entonces $\rho|_{\mathcal{E}_t}\colon \mathcal{E}_t \to \mathcal{F}_t$ es un homomorfismo inyectivo de módulos de Hilbert; por lo tanto es isométrico. Esto implica que ρ es una isometría y de [FD88, II 13.17] deducimos que ρ^{-1} es continuo. Es evidente que ρ^{-1} satisface (a) y (b); por otra parte dados $u, v, w \in \mathcal{F}$ la condición (c) implica que

$$\rho^{-1}(u)\langle \rho^{-1}(v), \rho^{-1}(w)\rangle = \rho^{-1} \circ \rho(\rho^{-1}(u)\langle \rho^{-1}(v), \rho^{-1}(w)\rangle) = \rho^{-1}(u\langle v, w\rangle).$$

De existir ρ^r éste queda determinado en cada fibra $\mathcal{E}_t$ en el denso $U_t^{\mathcal{E}} := \operatorname{span}\{\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}\rangle \cap \mathcal{A}_t\}$. Luego ρ^r es único porque es continuo y queda determinado enun conjunto denso.

Probemos que para cada $t \in G$ existe una única función lineal $\mu_t\colon U_t^{\mathcal{E}} \to U_t^{\mathcal{F}}$ tal que $\mu_t(\langle x, y\rangle) = \langle \rho(x), \rho(y)\rangle$. Para hacer esto basta mostrar que dados $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{E}$ tales que $\langle x_j, y_j\rangle \in \mathcal{A}_t$, se tiene que $z := \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j\rangle$ es nulo si y solamente si $w := \sum_{j=1}^n \langle \rho(x_j), \rho(y_j)\rangle$ es nulo. Si $z = 0$ entonces $w = 0$ porque

$$\begin{aligned}\|w\|^2 = \|w^* w\| &= \| \sum_{j,k=1}^n \langle \rho(y_j), \rho(x_j)\rangle \langle \rho(x_k), \rho(y_k)\rangle \| = \| \sum_{j,k=1}^n \langle \rho(y_k\langle x_j, y_j\rangle), \rho(x_k)\rangle \| \\ &= \| \sum_{k=1}^n \langle \rho(y_k z), \rho(x_k)\rangle \| = 0.\end{aligned}$$

Recíprocamente, utilizando lo que acabamos de mostrar pero esta vez para ρ^{-1} deducimos que $w = 0$ implica $z = 0$. Esto implica la inyectividad de μ_t.

Observemos que si $\langle x,y\rangle \in \mathcal{A}_t$ entonces $\mu_t(\langle x,y\rangle)^* = \langle \rho(x),\rho(y)\rangle^* = \mu_{t^{-1}}(\langle y,x\rangle) = \mu_{t^{-1}}(\langle x,y\rangle^*)$; lo cual implica que $\mu_t(a)^* = \mu_{t^{-1}}(a)^*$, para todo $a \in U_t^{\mathcal{E}}$ y $t \in G$. Por otro lado, si $\langle z,w\rangle \in \mathcal{E}_r$ entonces

$$\begin{aligned}\mu_t(\langle x,y\rangle)\mu_r(\langle z,w\rangle) &= \langle \rho(x),\rho(y)\rangle\langle \rho(z),\rho(w)\rangle = \langle \rho(x),\rho(y)\langle \rho(z),\rho(w)\rangle\rangle\\ &= \langle \rho(x),\rho(y\langle z,w\rangle\rangle = \mu_{tr}(\langle x,y\langle z,w\rangle\rangle) = \mu_{tr}(\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle);\end{aligned}$$

lo cual implica que $\mu_t(a)\mu_r(b) = \mu_{rt}(ab)$ para todo $a \in U_t^{\mathcal{E}}$, $b \in U_r^{\mathcal{E}}$ y $r,t \in G$.

Lo anterior implica que $\mu_e\colon U_e^{\mathcal{E}} \to U_e^{\mathcal{F}}$ es un $*-$homomorfismo; de hecho es un $*-$isomorfismo porque su inversa se construye a partir de ρ^{-1} exactamente como construimos μ a partir de ρ. Además $U_e^{\mathcal{E}}$ es denso en $\mathcal{A}_e$ y $U_e^{\mathcal{F}}$ lo es en $\mathcal{B}_e$ porque $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son plenos. En esta situación de [FD88, VI 19.11] deducimos que μ_e es una isometría. Esto implica que cada μ_t es una isometría ya que para todo $a \in U_t^{\mathcal{E}}$ $\|\mu_t(a)\|^2 = \|\mu_t(a)\mu_t(a)^*\| = \|\mu_e(aa^*)\| = \|aa^*\| = \|a\|^2$.

Definamos $\rho^r\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de manera que para cada $t \in G$ $\rho^r|_{\mathcal{A}_t}$ es la única extensión continua de μ_t; luego ρ^r es una isometría. Utilizando argumentos de continuidad y lo mostrado dos párrafos más atrás deducimos que ρ^r es lineal en cada fibra, preserva la multiplicación y la involución. Además $\rho^r(\mathcal{A}_t) = \mathcal{B}_t$ porque $\mathcal{B}_t = \overline{U_t^{\mathcal{F}}} = \overline{\rho^r(U_t^{\mathcal{E}})}$.

Para mostrar que ρ^r es continua utilizaremos [FD88, II 13.16]. Dadas $f \in C_c(\mathcal{E})$ y $x \in \mathcal{E}_r$ definamos $[f,x]\colon G \to \mathcal{A}$ como $[f,x](t) = \langle f(rt^{-1}),x\rangle$; con lo que definimos $\Gamma := \operatorname{span}\{[f,x]\colon f \in C_c(\mathcal{E}),\ x \in \mathcal{E}\}$. Notemos que para cada $t \in G$ se cumple $\{u(t)\colon u \in \Gamma\} = \operatorname{span}(\langle \mathcal{E},\mathcal{E}\rangle \cap \mathcal{A}_t)$ es denso en $\mathcal{A}_t$. Para mostrar que ρ^r basta con observar que $\{\rho^r \circ u\colon \ \in \Gamma\} = \{[\rho \circ f,\rho(x)]\colon f \in C_c(\mathcal{E}),\ x \in \mathcal{E}\} \subset C_c(\mathcal{B})$. Como ρ^r es una isometría, lo anterior junto con [FD88, II 13.17] implica que $(\rho^r)^{-1}$ es continua.

Para terminar observamos que $(\rho^r)^{-1}|_{U_t^{\mathcal{F}}} = (\rho^{-1})^r|_{U_t^{\mathcal{F}}}$, para todo $t \in G$. Luego $(\rho^r)^{-1}$ coincide con $(\rho^{-1})^r$ en un conjunto denso y por lo tanto son iguales. □

Otra de las construcciones que necesitamos es la de fibrado adjunto:

Teorema 2.37. *Para cada $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno sobre G, $\mathcal{E}$, existe un único $\mathcal{B}-\mathcal{A}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno $\widetilde{\mathcal{E}}$ con las siguientes propiedades:*

(a) para todo $t \in G$ es $\widetilde{\mathcal{E}}_t = \mathcal{E}_{t^{-1}}$ como espacios de Banach.

(b) para todo $x,y \in \widetilde{\mathcal{E}}$, $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$, si $\cdot$ representa las acciones a derecha e izquierda de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $\mathcal{E}$: $\langle x,y\rangle_r^{\mathcal{A}} = \langle x,y\rangle_l^{\mathcal{B}}$, $\langle x,y\rangle_l^{\mathcal{B}} = \langle x,y\rangle_r^{\mathcal{A}}$, $ax = x\cdot a^*$, $xb = b^*\cdot x$.

(c) para toda $f \in C_c(\mathcal{E})$ la función $\widetilde{f}\colon G \to \widetilde{E}$, $t \mapsto f(t^{-1})$, es continua.

Demostración. Observemos que las condiciones (a) y (b) determinan, excepto por la topología de $\widetilde{\mathcal{E}}$, toda la estructura de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Por otra parte para todo $t \in G$ se tiene que $\{\widetilde{f}(t)\colon f \in C_c(\mathcal{E})\} = \mathcal{E}_{t^{-1}} = \widetilde{\mathcal{E}}_t$. Luego [FD88, II 13.16] la condición (c) determina la topología de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Lo que debemos hacer es mostrar que todas estas estructuras son compatibles.

Sea $\pi\colon \mathcal{E} \to G$ la proyección de $\mathcal{E}$. Como conjuntos debe ser $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$ y consideramos en $\widetilde{\mathcal{E}}$ la topología de $\mathcal{E}$, por lo que (c) se cumple trivialmente. Cambiemos la proyección por $\rho\colon \widetilde{\mathcal{E}} \to G$, $\rho(x) = \pi(x)^{-1}$. Es evidente que ρ es continua, sobreyectiva y abierta y que $\rho^{-1}(t) = \pi^{-1}(t^{-1}) = \mathcal{E}_{t^{-1}} = \widetilde{\mathcal{E}}_t$. La estructura de fibrado de Banach de $\widetilde{\mathcal{E}}$ es la de $\mathcal{E}$ con el producto por escalares conjugados. Como no hemos cambiado la noción de convergencia ni la suma en las fibras ni la norma es evidente que $\widetilde{\mathcal{E}}$ es un fibrado de Banach sobre G.

Los productos internos de $\widetilde{\mathcal{E}}$ son continuos porque como funciones entre espacios topológicos son los mismos que los de $\mathcal{E}$. Por otra parte la acción a derecha de $\widetilde{\mathcal{E}}$ es continua porque se obtiene como la composición de las funciones continuas $\widetilde{\mathcal{E}} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \times \mathcal{E}$, $(x, a) \mapsto (x, a^*)$, y $\mathcal{B} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $(b, y) \mapsto b \cdot y$. De forma análoga se muestra que la acción a izquierda es continua.

El resto de las propiedades a verificar no involucran la topología de $\widetilde{\mathcal{E}}$ y se deducen directamente de las propiedades respectivas de $\mathcal{E}$. $\square$

Definición 2.38. El fibrado $\widetilde{\mathcal{E}}$ dado por el Teorema anterior es el *fibrado adjunto* de $\mathcal{E}$.

Usaremos el fibrado adjunto para "pasar resultados de derecha a izquierda" como lo ejemplificamos en el siguiente enunciado.

Corolario 2.39. *Supongamos que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$ y $\mathcal{A}'-\mathcal{B}'-$fibrados de Fell-Hilbert plenos, respectivamente, sobre el grupo G y que existe una función continua $\rho\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ tal que:*

(a) Para todo $t \in G$, $\rho(\mathcal{E}_t) = \mathcal{E}'_t$.

(b) ρ es continua, inyectiva y lineal en cada fibra.

(c) Para todo $x, y, z \in \mathcal{E}$, $\rho(x\langle y, z\rangle_r^{\mathcal{B}}) = \rho(x)\langle \rho(y), \rho(z)\rangle_r^{\mathcal{B}'}$.

Luego existen únicos isomorfismos de fibrados de Fell $\rho^r\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ y $\rho^l\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tales que $\rho^r(\langle x, y\rangle_r^{\mathcal{B}}) = \langle \rho(x), \rho(y)\rangle_r^{\mathcal{B}'}$ y $\rho^l(\langle x, y\rangle_l^{\mathcal{A}}) = \langle \rho(x), \rho(y)\rangle_l^{\mathcal{A}'}$, para todo $x, y \in \mathcal{E}$.

Demostración. La existencia de ρ^r se deduce del Teorema 2.36 olvidando en $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ sus operaciones como fibrados de módulos a izquierda.

Para mostrar la existencia de ρ^l consideremos los módulos adjuntos $\widetilde{\mathcal{E}}$ y $\widetilde{\mathcal{E}'}$ y la función $\nu\colon \widetilde{\mathcal{E}} \to \widetilde{\mathcal{E}'}$, definida como aquella que coincide con ρ (recordemos que tenemos la igualdad de conjuntos $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$ y $\widetilde{\mathcal{E}'} = \mathcal{E}'$).

Es inmediato que ν cumple las condiciones (a) y (b) del Teorema 2.36, para mostrar que cumple la (c) observemos que dados $x, y, z \in \widetilde{\mathcal{E}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\nu(x)\cdot\langle\nu(y),\nu(z)\rangle_r^{\mathcal{A}'} &= \langle\rho(z),\rho(y)\rangle_l^{\mathcal{A}'}\rho(x) = \rho(z)\langle\rho(y),\rho(x)\rangle_r^{\mathcal{B}'} = \rho(z\langle y,x\rangle_r^{\mathcal{B}})\\ &= \rho(\langle z,y\rangle_l^{\mathcal{A}}x) = \nu(x\langle y,z\rangle_r^{\mathcal{A}}).\end{aligned}$$

Luego ν^r es un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. Si $\rho^l := \nu^r$ entonces para todo $x, y \in \mathcal{E}$ se cumple que $\rho^l(\langle x,y\rangle_l^{\mathcal{A}}) = \nu^r(\langle x,y\rangle_r^{\mathcal{A}}) = \langle\nu(x),\nu(y)\rangle_r^{\mathcal{A}'} = \langle\rho(x),\rho(y)\rangle_l^{\mathcal{A}'}$. □

2.5.1.1. Operadores adjuntables

Fijemos un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$.

Definición 2.40. Un par (S, T) es un *centralizador doble* de $\mathcal{E}$ de orden $s \in G$ si: (i) $S, T\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ son continuas (ii) $S(\mathcal{E}_t) \subset \mathcal{E}_{st}$ y $T(\mathcal{E}_t) \subset \mathcal{E}_{s^{-1}t}$ para todo $t \in G$ (iii) $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, para todo $x, y \in \mathcal{E}$ y (iv) existe una constante $C \geq 0$ tal que $\|Sx\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in \mathcal{E}$.

Una función $S\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es un *operador adjuntable* de orden $s \in G$ si existe un centralizador doble (T_1, T_2) de $\mathcal{E}$ de orden s tal que $S = T_1$.

Notación 2.41. $\mathbb{B}_s(\mathcal{E})$ es el conjunto formado por los operadores de orden s de $\mathcal{E}$.

Ejemplo 2.4. Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{A} - \mathcal{B}-$ fibrado de Fell-Hilbert entonces todo elemento $a \in \mathcal{A}$ define un centralizador doble (L_a, R_a) por la fórmula $L_a(x) = ax$ y $R_a(x) = a^*x$.

La definición anterior implica que para cada centralizador doble de orden s, (S, T), cada restricción $S|_{\mathcal{E}_t}\colon \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}_{st}$ es un operador adjuntable entre $\mathcal{B}_e-$módulos de Hilbert con adjunto $T|_{\mathcal{E}_{st}}$. Por lo tanto el par (S, T) queda completamente determinado por S o por T. A T lo llamaremos adjunto de S y lo denotaremos S^*. Para mantener la notación usual de módulos de Hilbert, cuando digamos que S es un operador adjuntable de orden s de $\mathcal{E}$ estaremos diciendo que S es el primer elemento de un centralizador doble (S, T).

Observación 2.42. El conjunto $\{\|S|_{\mathcal{E}_t}\|\colon t \in G\} = \{\|T|_{\mathcal{E}_t}\|\colon t \in G\}$ está acotado superiormente y (T, S) es un centralizador doble si y solamente si (S, T) lo es.

De la igualdad $\langle S(xa) - (Sx)a, y\rangle = \langle xa, S^*(y)\rangle - a^*\langle Sx, y\rangle = a^*\langle x, S^*(y)\rangle - a^*\langle Sx, y\rangle = 0$, válida para todo $x, y \in \mathcal{E}$ y $a \in \mathcal{B}$, se deduce que $S(xa) = (Sx)a$. Por lo tanto escribiremos Sxa tanto para $S(xa)$ como para $(Sx)a$.

Proposición 2.43. *Supongamos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert sobre G. Luego dados $s \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $S, T \in \mathcal{B}_s(\mathcal{E})$ se tiene que la función $\lambda S + T \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $x \mapsto \lambda S(x) + T(x)$, es un operador de orden s con adjunto $\overline{\lambda} S^* + T^*$. Además $\mathbb{B}_s(\mathcal{E})$ es un espacio de Banach con la suma y producto por escalares anteriores y la norma $\|S\| := \sup\{\|Sx\| \colon x \in \mathcal{E},\ \|x\| \leq 1\}$. Para todo $s, t \in G$ y $S \in \mathbb{B}_s(\mathcal{E})$ y $T \in \mathbb{B}_t(\mathcal{E})$ se cumple que $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$, $\|S^*\| = \|S\|$ y $\|S^* \circ S\| = \|S\|^2$.*

Demostración. Observemos que para todo $S \in \mathbb{B}_s(\mathcal{E})$ todo $t \in \mathcal{E}_t$ la restricción $S|_{\mathcal{E}_t}$ es un operador adjuntable de $\mathcal{E}_t$ en $\mathcal{E}_{st}$ con adjunto $S^*|_{\mathcal{E}_{st}}$, donde pensamos a las fibras de $\mathcal{E}$ como $\mathcal{B}_e-$módulos de Hilbert. Durante la prueba utilizaremos las siguientes igualdades, que se obtienen o bien directamente o por las consideraciones anteriores:

$$\begin{aligned}\|S\| &= \operatorname{ínf}\{C \in [0, +\infty) \colon \|S(x)\| \leq C\|x\| \ \forall\ x \in \mathcal{E}\} \\ &= \sup\{\|S|_{\mathcal{E}_t}\| \colon t \in G\} = \sup\{\|(S|_{\mathcal{E}_t})^* \circ S|_{\mathcal{E}_t}\| \colon t \in G\} \\ &= \sup\{\|S^* \circ S|_{\mathcal{E}_t}\| \colon t \in G\} = \|S^* \circ S\|.\end{aligned}$$

En caso que $T \in \mathbb{B}_t(\mathcal{E})$, para todo $x \in \mathcal{E}$ se cumple que $\|S \circ T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$, por lo que $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.

La identidad $\|S^*\| = \|S\|$ es otra forma de expresar la Observación 2.42.

Supongamos ahora que $S, T \in \mathbb{B}_s(\mathcal{E})$. La función $\lambda S + T \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $x \mapsto \lambda S(x) + T(x)$, está definida porque para todo $x \in \mathcal{E}_t$ se tiene $\lambda S(x), T(x) \in \mathcal{E}_{st}$. Por otro lado, dados $x, y \in \mathcal{E}_t$ tenemos $\langle \lambda S(x) + T(x), y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, S^*(y)\rangle + \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\lambda} S^*(y) + T(y)\rangle$. La continuidad de las funciones $\lambda S + T \colon$ y $\overline{\lambda} S^* + T$ se deduce inmediatamente de la Proposición A.1 utilizando los homeomorfismos $G \to G$, $t \mapsto st$ y $t \mapsto ts^{-1}$ y el conjunto $\Gamma = C_0(\mathcal{E})$. Además, si $\|x\| \leq 1$ entonces $\|\lambda S(x) + T(x)\| \leq (|\lambda|\|S\| + \|T\|)\|x\|$. De esto concluimos que $(\lambda S + T, \overline{\lambda} S^* + T^*)$ es centralizador doble y que $\|\lambda S + T\| \leq |\lambda|\|S\| + \|T\|$.

De lo que nos resta mostrar lo más complicado es la completitud. Tomemos una sucesión de Cauchy $\{T_n\}_n \in \mathbb{B}_s(\mathcal{E})$. Dado $t \in G$ la sucesión $\{T_n|_{\mathcal{E}_t}\}_n \subset \mathbb{B}(\mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{st})$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto es convergente; llamemos R_t a su límite. Afirmamos que la función $R \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, definida como $R(x) = R_t(x)$ para $x \in \mathcal{E}_t$, es un operador adjuntable de orden s.

Para mostrar que R es continua apelaremos a la Proposición A.1. Por construcción $R(\mathcal{E}_t) \subset \mathcal{E}_{st}$ y R es lineal en cada fibra, por lo que consideramos el homeomorfismo $m_s \colon G \to G$, $t \mapsto st$, para utilizar la Proposición antes referida. Cada restricción $R|_{\mathcal{E}_t}$ tiene norma menor o igual a $k := \operatorname{lím}_n \|T_n\|$. Luego $\|R(x)\| \leq k\|x\|$, para todo $x \in \mathcal{E}$. Puesto que $\mathcal{E}$ es un fibrado de Banach sobre un espacio HLC, $C_0(\mathcal{E})$ es un espacio de Banach con la norma del supremo y para cada $x \in \mathcal{E}$ existe $f \in C_0(\mathcal{E})$ tal que $f(\pi(x)) = x$. Notemos que si $f \in C_0(\mathcal{E})$ entonces la sección $R \circ f \circ m_s^{-1}$ es el límite puntual de $\{T_n \circ f \circ m_s^{-1}\}_n$. Por otro lado $\{T_n \circ f \circ m_s^{-1}\}_n$ es de Cauchy porque $\|T_n \circ f \circ m_s^{-1} - T_m \circ f \circ m_s^{-1}\| \leq \|T_n - T_m\|\|f\|$, luego el límite puntual de $\{T_n \circ f \circ m_s^{-1}\}_n$ es una sección continua de $\mathcal{E}$. Entonces $R \circ f \circ m_s^{-1} \in C_0(\mathcal{E})$, para toda $f \in C_0(\mathcal{E})$; lo que implica que R es continua.

Observemos que $\{T_n^*\}_n$ es una red de Cauchy en $\mathbb{B}_{s^{-1}}(\mathcal{E})$, por lo que $\{T_n^*\}_n$ converge puntualmente a una función continua $S\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Dados $x \in \mathcal{E}_r$ e $y \in \mathcal{E}_t$ tenemos $\langle R(x), y\rangle = \lim_n \langle T_n(x), y\rangle = \lim_n \langle x, T_n{}^*(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle$. Con esto mostramos que $R \in \mathbb{B}_s(\mathcal{E})$. Finalmente $\|R(x) - T_n(x)\| = \lim_m \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \limsup_m \|T_m - T_n\|$ (el límite superior); de lo que deducimos que $\{T_n\}_n$ converge a R. $\square$

De forma inmediata, sin necesidad de demostració, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 2.44. $\mathbb{B}_e(\mathcal{E})$ *es una C*-álgebra con la composición como producto, la involución de multiplicadores como involución y la estructura de espacio de Banach dada por la Proposición anterior.*

Extendiendo, por analogía, el concepto de operadores compactos podemos enunciar lo siguiente:

Lema 2.45. *Dados* $x \in \mathcal{E}_s$ *e* $y \in \mathcal{E}_t$ *la función* $|x\rangle\langle y|\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ z \mapsto x\langle y, z\rangle$, *es un operador adjuntable de orden* st^{-1} *con adjunto* $|y\rangle\langle x|$. *Además* $\||x\rangle\langle y|\| \leq \|x\|\|y\|$.

Demostración. Para todo $z \in \mathcal{E}_r$ se tiene que $|x\rangle\langle y|(z) = x\langle y, z\rangle \in \mathcal{E}_{st^{-1}r}$ y $\||x\rangle\langle y|(z)\| = \|x\langle y, z\rangle\| \leq \|x\|\|y\|\|z\|$. Además, si $w \in \mathcal{E}$ entonces $\langle |x\rangle\langle y|(z), w\rangle = \langle x\langle y, z\rangle, w\rangle = \langle z, y\rangle\langle x, w\rangle = \langle z, y\langle x, w\rangle\rangle = \langle z, |y\rangle\langle x|(w)\rangle$.

Para terminar basta con observar que $\mathcal{E} \to \mathcal{E},\ z \mapsto |x\rangle\langle y|(z)$ y $z \mapsto |y\rangle\langle x|(z)$, son continuas porque las operaciones de módulo son continuas. $\square$

Definición 2.46. El espacio de operadores compactos generalizados de orden s de $\mathcal{E}$, $\mathbb{K}_s(\mathcal{E})$, es la clausura en $\mathbb{B}_s(\mathcal{E})$ de $\operatorname{span}\{|x\rangle\langle y|\colon x \in \mathcal{E}_r,\ y \in \mathcal{E}_{r^{-1}s},\ r \in G\}$.

Dejamos al lector la demostración del primer párrafo del siguiente Lema. El segundo es consecuencia inmediata del primero y de los resultados anteriores.

Lema 2.47. *Para todo módulo de Fell-Hilbert* $\mathcal{E}$ *se cumple:* $\mathbb{B}_s(\mathcal{E})^* = \mathbb{B}_{s^{-1}}(\mathcal{E})$, $\mathbb{B}_r(\mathcal{E}) \circ \mathbb{B}_s(\mathcal{E}) \subset \mathbb{B}_{rs}(\mathcal{E})$, $\mathbb{K}_s(\mathcal{E})^* = \mathbb{K}_{s^{-1}}(\mathcal{E})$ *y* $\mathbb{K}_r(\mathcal{E}) \circ \mathbb{B}_s(\mathcal{E}) \subset \mathbb{K}_{rs}(\mathcal{E})$. *En particular* $\mathbb{K}_e(\mathcal{E})$ *es un ideal (cerrado) de la C*-álgebra* $\mathbb{B}_e(\mathcal{E})$.

2.5.1.2. El fibrado de enlace

Inspirados en la construcción del álgebra de enlace (*linking algebra*) de un módulo de Hilbert construimos, a partir de cualquier módulo de Fell-Hilbert, una especie de "fibrado de enlace" (*linking bundle*). Hasta el momento esta construcción no aparece en la literatura pero F. Abadie la desarrolló antes que yo al menos para grupos discretos.

Fijemos un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$ sobre G. Para cada $t \in G$ definamos

$$\mathbb{L}(\mathcal{E})_t := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) : S \in \mathbb{K}_t(\mathcal{E}),\, x \in \mathcal{E}_t,\, y \in \mathcal{E}_{t^{-1}},\, a \in \mathcal{B}_t \right\}, \tag{2.5.1}$$

al cual equipamos con las operaciones de suma y producto por escalares entrada a entrada. Llamemos $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ al fibrado sobre G de espacios vectoriales cuya fibra sobre $t \in G$ es $\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$. En este fibrado definimos las operaciones de multiplicación e involución

$$\left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} T & z \\ w & b \end{smallmatrix} \right) := \left(\begin{smallmatrix} S \circ T + |x\rangle\langle w| & Sz + xb \\ T^* y + w a^* & \langle y, z\rangle + ab \end{smallmatrix} \right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right)^* = \left(\begin{smallmatrix} S^* & y \\ x & a^* \end{smallmatrix} \right). \tag{2.5.2}$$

Observemos que $\mathbb{L}(\mathcal{E})_r \mathbb{L}(\mathcal{E})_s \subset \mathbb{L}(\mathcal{E})_{rs}$ y que $\mathbb{L}(\mathcal{E})_r{}^* = \mathbb{L}(\mathcal{E})_{r^{-1}}$. Además sin mayores dificultades podemos mostrar que la multiplicación es bilineal en cada fibra y la involución es conjugado lineal. Para dar una estructura de fibrado de Fell a $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ nos falta definir su C*-norma y su topología, primero describimos la norma.

En el siguiente enunciado escribiremos los elementos de $\mathcal{E}_r \oplus \mathcal{B}_r$ como columnas.

Lema 2.48. *Para cada $r, s \in G$ existe una única función lineal $\phi_{r,s} \colon \mathbb{L}(\mathcal{E})_r \to \mathbb{B}(\mathcal{E}_s \oplus \mathcal{B}_s, \mathcal{E}_{rs} \oplus \mathcal{B}_{rs})$ tal que*

$$\phi \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} u \\ b \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} Su + xa \\ \langle y, u\rangle + ab \end{smallmatrix} \right), \quad \forall \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_t,\ \left(\begin{smallmatrix} u \\ b \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{E}_s \oplus \mathcal{B}_s \ y\ s \in G.$$

Además se cumple que

- $\|\phi_{r,s} \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right)\| \leq \| \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) \|_1 := \|S\| + \|x\| + \|y\| + \|a\|$, *para todo* $\left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{L}(\mathcal{E})$.
- $\phi_{t,rs}(R)\phi_{r,s}(T) = \phi_{tr,s}(R \circ T)$ *y* $\phi_{r,s}(T)^* = \phi_{r^{-1},rs}(T^*)$, *para todo* $r, s, t \in G$, $T \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_r$ *y* $R \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_t$.

Demostración. Dada $T := \left(\begin{smallmatrix} S & x \\ y & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_r$ definamos $T^* := \left(\begin{smallmatrix} S^* & y \\ x & a^* \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_{r^{-1}}$ y observemos que $\phi_{r^{-1},rs}(T^*)$ es el adjunto de $\phi_{r,s}(T)$ porque

$$\begin{aligned} \langle \phi_{r,s}(T) \left(\begin{smallmatrix} u \\ b \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} v \\ c \end{smallmatrix} \right) \rangle &= \langle Su + xb, v\rangle + (\langle y, u\rangle + ab)^* c = \langle u, S^* v + yc\rangle + b^*(\langle x, v\rangle + a^* c) \\ &= \langle \left(\begin{smallmatrix} u \\ b \end{smallmatrix} \right), \phi_{sr,s^{-1}}(T^*) \left(\begin{smallmatrix} v \\ c \end{smallmatrix} \right) \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado observemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_{r,s}\left(\begin{smallmatrix} S & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2 &= \|\langle Su, Su\rangle\| \leq \|S\|^2\|u\|^2 \leq \|S\|^2\|\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2\\
\|\phi_{r,s}\left(\begin{smallmatrix} 0 & x\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2 &= \|\langle xb, xb\rangle\| \leq \|x\|^2\|b\|^2 \leq \|x\|^2\|\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2\\
\|\phi_{r,s}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ y & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2 &= \|\langle y, u\rangle\|^2 \leq \|y\|^2\|u\|^2 \leq \|y\|^2\|\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2\\
\|\phi_{r,s}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2 &= \|ab\|^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2 \leq \|a\|^2\|\left(\begin{smallmatrix} u\\ b\end{smallmatrix}\right)\|^2;
\end{aligned}$$

con lo cual la desigualdad triangular y la linealidad de $\phi_{r,s}$ implican la cota de las normas.

Por último la igualdad $\phi_{t,rs}(R)\phi_{r,s}(T) = \phi_{tr,s}(R\circ T)$ se deduce de que

$$\begin{aligned}
\phi_{t,rs}\left(\begin{smallmatrix} U & x\\ y & a\end{smallmatrix}\right)\phi_{r,s}\left(\begin{smallmatrix} V & z\\ w & b\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u\\ c\end{smallmatrix}\right) &= \phi_{t,rs}\left(\begin{smallmatrix} U & x\\ y & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} Vu+zc\\ \langle w,u\rangle+bc\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} UVu+Uzc+x\langle w,u\rangle+xbc\\ \langle y,Vu\rangle+\langle y,zc\rangle+a\langle w,u\rangle+abc\end{smallmatrix}\right)\\
&= \left(\begin{smallmatrix} (U\circ V+|x\rangle\langle w|)u+(Uz+xb)c\\ \langle V^*y+wa^*,u\rangle+(\langle y,z\rangle+ab)c\end{smallmatrix}\right) = \phi_{tr,s}\left[\left(\begin{smallmatrix} U & x\\ y & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} V & z\\ w & b\end{smallmatrix}\right)\right]\left(\begin{smallmatrix} u\\ c\end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.49. *Para cada $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$ sobre G existe un único fibrado de Fell $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ sobre G de manera que:*

(a) La fibra sobre t es $\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$ (Ecuación 2.5.1), para todo $t\in G$.

(b) La suma y multiplicación por escalares es entrada a entrada (en cada fibra) y la multiplicación e involución son las de las Ecuaciones 2.5.2.

(c) Para todo $t\in G$ y $a\in\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$ se tiene $\|a\| = \sup_{s\in G}\|\phi_{t,s}(a)\|$.

(d) Para todo $r\in G$, $a,b,c,d\in C_c(\mathcal{E})$ y $e\in C_c(\mathcal{B})$ la función $[r,a,b,c,d,e]\colon G\to\mathbb{L}(\mathcal{E})$, definida como $[r,a,b,c,d,e](t) := \left(\begin{smallmatrix} |a(tr)\rangle\langle b(r)| & c(t)\\ d(t^{-1}) & e(t)\end{smallmatrix}\right)$, es una sección continua.

Demostración. Comenzaremos por verificar las propiedades algebraicas, lo que equivale a pensar que G tiene la topología discreta. Observemos que el Lema anterior implica que para cada $t\in G$ $\{a\mapsto\|\phi_{t,r}(a)\|\}_{r\in G}$ es una familia acotada de seminormas, por lo tanto su supremo es una seminorma en $\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$. Mostraremos que ese supremo es una norma completa viendo que es equivalente a la norma $\|\left(\begin{smallmatrix} T & x\\ y & a\end{smallmatrix}\right)\|_m := \text{máx}\{\|T\|,\|x\|,\|y\|,\|a\|\}$. Si $M := \left(\begin{smallmatrix} T & x\\ y & a\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$, $z\in\mathcal{E}_r$ y $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $\mathcal{B}_e$ entonces las desigualdades

$$\begin{aligned}
\|Tz\|^2 &= \|\langle Tz, Tz\rangle\| \leq \|\langle Tz, Tz\rangle + \langle yz, yz\rangle\| = \|\phi_{t,r}\left(\begin{smallmatrix} T & x \\ y & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} z \\ 0\end{smallmatrix}\right)\|^2 \leq \|M\|^2\|z\|^2;\\
\|x\|^2 &= \|\langle x, x\rangle\| = \lim_i \|e_i\langle x, x\rangle e_i\| \leq \lim_i \|\langle xe_i, xe_i\rangle + (ae_i)^*(ae_i)\|\\
&\leq \lim_i \|\phi_{t,e}\left(\begin{smallmatrix} T & x \\ y & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ e_i\end{smallmatrix}\right)\|^2 \leq \|M\|^2;\\
\|y\|^4 &= \|\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle\| \leq \|\langle Ty, Ty\rangle + \langle y, y\rangle\langle y, y\rangle\| = \|\phi_{t,t^{-1}}\left(\begin{smallmatrix} T & x \\ y & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 0\end{smallmatrix}\right)\|^2 \leq \|M\|^2\|y\|^2;\\
\|a\|^4 &= \|(aa^*)(aa^*)\| \leq \|\langle xa^*, xa^*\rangle + (aa^*)(aa^*)\| = \|\|\phi_{t,t^{-1}}\left(\begin{smallmatrix} T & x \\ y & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a^*\end{smallmatrix}\right)\|^2\\
&\leq \|M\|^2\|a\|^2.
\end{aligned}$$

implican que $\|M\|_m \leq \|M\|$. Del Lema anterior deducimos que $\|\cdot\|_m \leq \|\cdot\| \leq 4\|\cdot\|_m$, con lo cual $\|\cdot\|$ es una norma completa porque $\|\cdot\|_m$ lo es.

Con lo que acabamos de mostrar y el Lema anterior podemos mostrar la asociatividad del producto de la siguiente manera: tomemos $a \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_r$, $b \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_s$ y $c \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_t$. Luego

$$\begin{aligned}
\|a(bc) - (ab)c\| &= \sup_{u\in G} \|\phi_{rst,u}(a(bc)) - \phi_{rst,u}((ab)c)\|\\
&= \sup_{u\in G} \|\phi_{t,stu}(a) \circ \phi_{st,u}(bc) - \phi_{rs,tu}(ab) \circ \phi_{t,u}(c)\|\\
&= \sup_{u\in G} \|\phi_{t,stu}(a) \circ (\phi_{s,tu}(b) \circ \phi_{t,u}(c)) - (\phi_{r,stu}(a) \circ \phi_{s,tu}(b)) \circ \phi_{t,u}(c)\|\\
&= 0;
\end{aligned}$$

lo cual implica $a(bc) = (ab)c$.

Con respecto a la compatibilidad del producto con la norma, si a y b son como arriba:

$$\begin{aligned}
\|ab\| &= \sup_{u\in G} \|\phi_{rs,u}(ab)\| = \sup_{u\in G} \|\phi_{r,su}(a) \circ \phi_{s,u}(b)\| \leq \|a\|\|b\| \text{ y}\\
\|a^*a\| &= \sup_{u\in G} \|\phi_{e,u}(a^*a)\| = \sup_{u\in G} \|\phi_{r^{-1},ru}(a^*) \circ \phi_{r,u}(a)\| = \sup_{u\in G} \|\phi_{r,u}(a)^* \circ \phi_{r,u}(a)\| = \|a\|^2.
\end{aligned}$$

Otro punto delicado es mostrar que $a^*a \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{L}(\mathcal{E})$. La $*-$representación de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ $\oplus_{s\in G}\phi_{e,s}$ es inyectiva porque ella define la norma de $\mathbb{L}(\mathcal{E})_e$; por lo que $a^*a \geq 0$ sii $\phi_{e,s}(a^*a) \geq 0$ para todo $s \in G$. Si $a \in \mathbb{L}(\mathcal{E})_r$ y $s \in G$ entonces $\phi_{e,s}(a^*a) = \phi_{r,rs}(a)^*\phi_{r,s}(a) \geq 0$, lo cual implica que $a^*a \geq 0$.

El resto de las verificaciones algebraicas (bilinealidad, compatibilidad del producto e involución, etc) se muestran con operaciones análogas.

Ahora nos ocuparemos de la topología de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$. Sea Γ el espacio generado por

$$\Gamma_0 := \{[r, a, b, c, d, e] \colon r \in G, a, b, c, d \in C_c(\mathcal{E}), e \in C_c(\mathcal{B})\}$$

en las secciones de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$. Para dar una estructura de fibrado de Banach utilizaremos [FD88, II 13.18], que nos dice que basta con mostrar que (i) para todo $t \in G$ el conjunto $\{u(t) \colon u \in \Gamma\}$ es denso en $\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$ y (ii) para toda $u \in \Gamma$ la función $G \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|u(t)\|$, es continua. La propiedad (i) se verifica inmediatamente recordando la definición de $\mathbb{L}(\mathcal{E})_t$ (y de $\mathbb{K}_t(\mathcal{E})$) y que $\mathcal{E}_t = \{u(t) \colon u \in C_c(\mathcal{E})\}$ (para todo $t \in G$).

Observemos que una vez verificada (ii) el resultado citado implica la unicidad de la topología de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$. El resto de la estructura de fibrado de Fell está completamente determinada por las condiciones del enunciado, por lo que tan sólo con verificar (ii) habremos mostrado la unicidad de la estructura de fibrado de Fell.

Veamos que si $u \in \Gamma$ entonces $t \mapsto \|u(t)\|$ es continua. Basta con mostrar que $t \mapsto \|u(t)\|^2 = \|u(t)^*u(t)\|$ es continua, lo que es implicado por la continuidad de la función $G \to \mathbb{L}(\mathcal{E})_e,\ t \mapsto u(t)^*u(t)$. Bastará con mostrar que $t \mapsto u(t)^*v(t)$ es continua, para toda $u, v \in \Gamma_0$. Si $u = [r, a, b, c, d, e]$ y $v = [s, f, g, h, i, j]$ entonces $u^*(t)v(t)$ es

$$\begin{pmatrix} |b(r)\langle a(tr), f(ts)\rangle\rangle\langle b(s)| + |d(t^{-1})\rangle\langle i(t^{-1})| & b(r)\langle a(tr), h(t)\rangle + d(t^{-1})j(t) \\ g(s)\langle f(ts), c(t)\rangle & \langle c(t), h(t)\rangle + e(t)^*j(t) \end{pmatrix}.$$

Debemos mostrar que cada una de las entradas de $u(\cdot)^*v(\cdot)$ son continuas, lo que es claro para todas excepto para la esquina superior izquierda. Observando la matriz de arriba deducimos que basta con mostrar que $|a\rangle\langle b| \colon G \mapsto \mathbb{K}_e(\mathcal{E}),\ t \mapsto |a(t)\rangle\langle b(t)|$, es continua (para cualquier $a, b \in C_c(\mathcal{E})$). Esto último se deduce del siguiente enunciado, que también utilizaremos más adelante.

Lema 2.50. *Supongamos que tenemos redes convergentes de $\mathcal{E}$ (indexadas en el mismo conjunto) $a_i \to a$ y $b_i \to b$ de manera que, para todo i, a_i y b_i están en la misma fibra. Entonces $\{|a_i\rangle\langle b_i|\}_i$ converge a $|a\rangle\langle b|$ en $\mathbb{K}_e(\mathcal{E})$.*

Dado $x \in \mathcal{E}$ con $\|x\| \leq 1$, para todo i se cumple que

$$\begin{aligned} \||a_i\rangle\langle b_i|x - |a\rangle\langle b|x\|^2 &\leq \|\langle x, b_i\rangle(\langle a_i, a_i\rangle\langle b_i, x\rangle - \langle a_i, a\rangle\langle b, x\rangle)\| + \\ &\qquad + \|\langle x, b\rangle(\langle a, a\rangle\langle b, x\rangle - \langle a, a_i\rangle\langle b_i, x\rangle\| \\ &\leq \|b_i\|\|\langle b_i\langle a_i, a_i\rangle - b\langle a, a_i\rangle, x\rangle\| + \\ &\qquad + \|b\|\|\langle b\langle a, a\rangle - b_i\langle a_i, a\rangle, x\rangle\| \\ &\leq \|b_i\|\|b_i\langle a_i, a_i\rangle - b\langle a, a_i\rangle\| + \|b\|\|b\langle a, a\rangle - b_i\langle a_i, a\rangle\| =: \lambda_i. \end{aligned}$$

Como $\lim_i \sqrt{\lambda_i} = 0$ y $0 \leq \||a_i\rangle\langle b_i| - |a\rangle\langle b|\| \leq \sqrt{\lambda_i}$, tenemos $\lim_i \||a_i\rangle\langle b_i| - |a\rangle\langle b|\| = 0$.

En este punto hemos dado a $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ estructura de fibrado de Banach con un producto y una involución que satisfacen las propiedades algebraicas de un fibrado de Fell. Es decir que sólo nos resta mostrar la continuidad del producto y la involución.

Para mostrar que el producto de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ es continuo utilizaremos [FD88, VIII 2.4], que establece que basta con mostrar que, dadas $u, v \in \Gamma$, la función $G \times G \to \mathbb{L}(\mathcal{E})$, $(s,t) \mapsto u(s)v(t)$, es continua. Tomemos una red $\{(s_i,t_i)\}_i \subset G\times G$ convergente a $(s_0,t_0) \in G\times G$. Basta con mostrar que $u(s_i)v(t_i) \to u(s_0)v(t_0)$. De acuerdo a lo observado en [FD88, II 13.18] basta con mostrar que para toda $w \in \Gamma$ se cumple que $\|u(s_i)v(t_i) - w(s_it_i)\| \to \|u(s_0)v(t_0) - w(s_0t_0)\|$. En nuestro caso nos bastará con mostrar que, definiendo

$$\begin{aligned}\Xi_i &:= (u(s_i)v(t_i) - w(s_it_i))^*(u(s_i)v(t_i) - w(s_it_i))\\ \Xi_0 &:= (u(s_0)v(t_0) - w(s_0t_0))^*(u(s_0)v(t_0) - w(s_0t_0));\end{aligned}$$

se cumple que $\Xi_i \to \Xi_0$ en $\mathbb{L}(\mathcal{E})_e$. La diferencia $\Xi_i - \Xi_0$ es una suma de elementos de la forma

$$\begin{pmatrix} |a(s_i,t_i)\rangle\langle b(s_i,t_i)| & c(s_i,t_i)\\ d(s_i,t_i) & f(s_i,t_i)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |a(s_0,t_0)\rangle\langle b(s_0,t_0)| & c(s_0,t_0)\\ d(s_0,t_0) & f(s_0,t_0)\end{pmatrix},$$

para ciertas funciones continuas $a,b\colon G\times G \to \mathcal{E}$; $c,d\colon G\times G\to \mathcal{E}_e$ y $f\colon G\times G\to\mathcal{B}_e$ con $a(s,t)$ y $b(s,t)$ en la misma fibra de $\mathcal{E}$, para todo $(s,t)\in G\times G$. Luego el Lema 2.50 junto con el hecho de que la C*-norma de $\mathbb{L}(\mathcal{E})_e$ es equivalente a $\|\cdot\|_m$ implican que $\Xi_i \to \Xi_0$. Para terminar mostramos que la involución es continua, para lo cual apelamos a [FD88, VIII 3.2], que establece que basta con mostrar que para toda $u\in\Gamma$ la función $t\mapsto u(t)^*$ es continua. Claramente basta con suponer que $u \in \Gamma_0$.

Razonando como en el caso del producto deducimos que basta con mostrar que, dados una red $\{t_i\}_i \subset G$ convergente a $t\in G$ y $u,v\in\Gamma_0$, la red $\{(u(t_i)^* - v({t_i}^{-1}))^*(u(t_i)^* - v({t_i}^{-1}))\}_i$ converge a $(u(t)^* - v(t^{-1}))^*(u(t)^* - v(t^{-1}))$ en $\mathbb{L}(\mathcal{E})_e$. De nuevo podemos imitar lo hecho antes para deducir que la diferencia

$$(u(t_i)^* - v({t_i}^{-1}))^*(u(t_i)^* - v({t_i}^{-1})) - (u(t)^* - v(t^{-1}))^*(u(t)^* - v(t^{-1}))$$

es una suma de términos de la forma

$$\begin{pmatrix} |a(t_i)\rangle\langle b(t_i)| & c(t_i)\\ d(t_i) & f(t_i)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |a(t)\rangle\langle b(t)| & c(t)\\ d(t) & f(t)\end{pmatrix},$$

para ciertas funciones continuas $a,b\colon G\to\mathcal{E}$; $c,d\colon G\to\mathcal{E}_e$ y $f\colon G\to\mathcal{B}_e$ con $a(s)$ y $b(s)$ en la misma fibra (para todo $s\in G$). Aquí también usamos el Lema 2.50 y el hecho de que la C*-norma de $\mathbb{L}(\mathcal{E})_e$ es equivalente a $\|\cdot\|_m$, pero esta vez para deducir que $t \mapsto u(t)^*$ es continua. $\square$

Corolario 2.51. *Para cada $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$ existe un único fibrado de Fell $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ de forma que:*

(a) $\mathbb{K}(\mathcal{E})_s = \mathbb{K}_s(\mathcal{E})$*, para todo* $s \in G$.

(b) La multiplicación en $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ es la composición, la involución corresponde a tomar adjuntos, la suma y multiplicación por escalares (en cada fibra) es punto a punto y la norma es la norma de operadores adjuntables de $\mathcal{E}$.

(c) Para cada $f, g \in C_c(\mathcal{E})$ y $r \in G$ la función $[r, f, g]\colon G \to \mathbb{K}(\mathcal{E})$, $t \mapsto |f(tr)\rangle\langle g(r)|$, es una sección continua.

Demostración. Las condiciones (a) y (b) determinan la estructura algebraica de manera única. Por otro lado, si $\Gamma := \operatorname{span}\{[r, f, g]\colon r \in G, f, g \in C_c(\mathcal{E})\}$, entonces para cada $t \in G$ tenemos que $\{u(t)\colon u \in \Gamma\}$ es denso en $\mathbb{K}(\mathcal{E})_s$. Luego la unicidad de la topología está dada por [FD88, II 13.18].

Para mostrar la existencia consideramos la función $\rho\colon \mathbb{K}(\mathcal{E}) \to \mathbb{L}(\mathcal{E})$, $\rho(T) = \left(\begin{smallmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Observemos que la imagen de ρ es un subfibrado de Fell de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ y que ρ preserva las operaciones algebraicas y es una isometría en cada fibra. Además $\{\rho \circ u\colon u \in \Gamma\}$ es una familia de secciones continuas de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$. Luego la topología a considerar en $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ es la única con la cual ρ es un homeomorfismo sobre su imagen. Es evidente entonces que $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ es un fibrado de Fell con esta estructura. $\square$

Corolario 2.52. *Todo $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$ es un $\mathbb{K}(\mathcal{E}) - \mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno a izquierda con la acción a izquierda $Tx = T(x)$ y el producto interno a izquierda $\langle x, y\rangle_l := |x\rangle\langle y|$.*

Demostración. Dado que la C*-norma de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ es equivalente a $\|\cdot\|_m$ podemos pensar (de acuerdo a [FD88, II 13.16-17]) $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathbb{K}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{L}(\mathcal{E})$ identificando

$$\mathcal{E} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathcal{E}\}, \ \mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathcal{B}\}, \ \mathbb{K}(\mathcal{E}) = \{\left(\begin{smallmatrix} T & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : T \in \mathbb{K}(\mathcal{E})\}.$$

De esta manera las acciones a izquierda y derecha y los productos internos se convierten en las restricciones de la estructura natural de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ como $\mathbb{L}(\mathcal{E}) - \mathbb{L}(\mathcal{E})-$fibrado de Fell-Hilbert, de lo que deducimos la tesis. $\square$

Tal como en los módulos de Hilbert existe, a menos de isomorfismos, una única manera de hacer de un fibrado a derecha (pleno) un fibrado “bilateral”.

Corolario 2.53. *Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno entonces $\mathcal{A}$ es isomorfo como fibrado de Fell a $\mathbb{K}(\mathcal{E})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ el $\mathbb{K}(\mathcal{E})-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert construido a partir de $\mathcal{E}$, considerado este último tan sólo como un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno a derecha. Llamemos ι a la identidad de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$ pero pensada como función de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$. Es inmediato que ι satisface las condiciones (a)-(c) del Corolario 2.39, el cual implica que $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\mathbb{K}(\mathcal{E})$. □

Corolario 2.54. *Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno sobre G entonces existe un único fibrado de Fell-Hilbert sobre G, $\mathcal{F} := \mathcal{E}\oplus\mathcal{B}$, tal que*

(a) Para cada $t\in G$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{E}_t\oplus\mathcal{B}_t$ como espacios vectoriales topológicos.

(b) Para cada $x\oplus z, y\oplus b\in\mathcal{F}$ y $c\in\mathcal{B}$ se cumple $\langle x\oplus a, y\oplus b\rangle = \langle x,y\rangle + a^*b$ y $(x\oplus a)c = xc\oplus ac$.

(c) Para toda $f\in C_c(\mathcal{E})$ y $a\in C_c(\mathcal{B})$ la función $[f,a]\colon G\to\mathcal{E}\oplus\mathcal{B}$, $t\mapsto f(t)\oplus a(t)$, es una sección continua.

Además $\mathbb{K}(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})$ es isomorfo a $\mathbb{L}(\mathcal{E})$.

Demostración. La unicidad se demuestra como lo hicimos en casos anteriores. Para mostrar la existencia basta considerar la función $\rho\colon\mathcal{F}\to\mathbb{L}(\mathcal{E})$, $\rho(x\oplus a) = \left(\begin{smallmatrix}0 & x\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)$, observar que su imagen es un subfibrado de Banach de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ y trasladar toda la estructura de $\rho(\mathcal{F})$ a $\mathcal{F}$ utilizando ρ. De hecho podríamos definir $\mathcal{E}\oplus\mathcal{A}$ como $\rho(\mathcal{F})$.

Pensando $\mathcal{B}$ como sub-fibrado de Fell de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ definamos en $\rho(\mathcal{F})$ la estructura de $\mathbb{L}(\mathcal{E})-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert como $M\cdot u := Mu$, $u\cdot a := ua$, $\langle u,v\rangle_l := uv^*$ y $\langle u,v\rangle_r := u^*v$. La definición de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ implica que $\rho(\mathcal{F})$ es pleno a derecha e izquierda. Como, además, $\rho(u\langle v,w\rangle) = \rho(u)\rho(v)^*\rho(w)$ el Corolario 2.53 nos dice que $\mathbb{K}(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})$ es isomorfo a $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ (mediante ρ^l). □

Corolario 2.55. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ entonces $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$ es un fibrado de Fell isomorfo a $\mathbb{L}(\mathcal{E}\gamma)$.*

Demostración. Como siempre llamaremos α a γ^r. Sea $\mathcal{F} := \{\left(\begin{smallmatrix}0 & x\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)\delta_t\colon x\in\mathcal{X}_t, a\in A_t, t\in G\}\subset\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$. Observemos que $\mathcal{F}$ es un subfibrado de Banach de $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$ y que es un $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)-\mathcal{B}\alpha-$fibrado de Fell-Hilbert pleno con las operaciones $T\cdot u := Tu$, $ua := ua$, $\langle u,v\rangle_l := uv^*$ y $\langle u,v\rangle_r := u^*v$.

De acuerdo con el Corolario anterior basta mostrar que la función

$$\nu\colon \mathcal{E}\gamma \oplus \mathcal{B}\alpha \to \mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma),\ \nu(x\delta_t \oplus a\delta_t) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\delta_t$$

cumple con las condiciones (a)-(c) del enunciado del Corolario 2.39. La condición (a) es evidente. En cuanto a la (b) lo único no inmediato es que ν es continua; lo que se deduce de [FD88, II 13.16] y del hecho de que para cada $f \in C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ y $a \in C_c^\alpha(G,A)$ la función $t \mapsto \nu(f(t)\delta_t \oplus a(t)\delta_t)$ es una sección continua de $\mathcal{F}$.

Para verificar la condición (c) observemos que si $x\delta_r \oplus a\delta_r, y\delta_s \oplus b\delta_s, z\delta_t \oplus c\delta_t \in \mathcal{E}\gamma \oplus \mathcal{B}\alpha$ entonces

$$\begin{aligned}
\nu\left(x\delta_r \oplus a\delta_r\langle y\delta_s \oplus b\delta_s, z\delta_t \oplus c\delta_t\rangle\right) &= \nu\left((x\delta_r \oplus a\delta_r)(\langle y\delta_s, z\delta_t\rangle + b\delta_s^* c\delta_t)\right)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_r\left[\gamma_{r^{-1}}(x)\alpha_{s^{-1}}(\langle y,z\rangle + b^*c)\right] \\ 0 & \alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_{s^{-1}}(\langle y,z\rangle + b^*c)\right]\end{pmatrix}\delta_{rs^{-1}t}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, calculando primero el producto de los dos últimos términos:

$$\begin{aligned}
\nu\left(\begin{smallmatrix} 0 & x\delta_r \\ 0 & a\delta_r \end{smallmatrix}\right)\nu\left(\begin{smallmatrix} 0 & y\delta_s \\ 0 & b\delta_s \end{smallmatrix}\right)^*\nu\left(\begin{smallmatrix} 0 & z\delta_t \\ 0 & c\delta_t \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\delta_r\mathbb{L}(\gamma)_{s^{-1}}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{y} & b^* \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & z \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\right)\delta_{s^{-1}t}\\
&= \mathbb{L}(\gamma)_r\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & \gamma_{r^{-1}}(x) \\ 0 & \alpha_{r^{-1}}(a) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{s^{-1}}(\langle y,z\rangle + b^*c) \end{smallmatrix}\right)\right)\delta_{s^{-1}t}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_r\left[\gamma_{r^{-1}}(x)\alpha_{s^{-1}}(\langle y,z\rangle + b^*c)\right] \\ 0 & \alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_{s^{-1}}(\langle y,z\rangle + b^*c)\right]\end{pmatrix}\delta_{rs^{-1}t}.
\end{aligned}$$

Esto termina de mostrar que ν satisface las condición (c) del teorema anterior, por lo que ν^l es un isomorfismo entre $\mathbb{L}(\mathcal{E}(\gamma))$ y $\mathcal{B}\mathbb{L}(\gamma)$. □

2.5.2. C*-álgebras seccionales

La idea ahora es construir, a partir de un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno $\mathcal{E}$, un $C^*(\mathcal{A})-C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia de Morita. Este bimódulo inducirá el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{B})$ en el núcleo de la representación regular de $C^*(\mathcal{A})$.

El lector familiarizado con el trabajo de Abadie y de Martí [Aba03, AMP09] podrá imaginarse cómo hacer lo anterior una vez que contamos con el fibrado de enlace $\mathbb{L}(\mathcal{E})$. La idea es: reemplazar $\mathcal{A}$ por $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ (esto es un cambio menor ya que $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ y por lo tanto son $r-$isomorfos) y construir $C^*(\mathcal{E})$ como la completación en $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ de $C_c(\mathcal{E})$ (pensando $\mathcal{E}$ como subfibrado de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$). Si todo funciona correctamente entonces $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E})) = \mathbb{L}(C^*(\mathcal{E}))$, $\mathbb{K}(C^*(\mathcal{E})) = C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y $C^*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{B}) = C^*(\mathcal{E}) \oplus C^*(\mathcal{B})$.

Lo primero es lidiar con las C*-normas universales. Siempre que $\mathcal{E}$ sea un $\mathcal{B}-$módulo de Hilbert pensaremos $\mathcal{E}, \mathbb{K}(\mathcal{E})$ y $\mathcal{B}$ dentro de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ como

$$\mathcal{E} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathcal{E}\}, \mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathcal{B}\} \text{ y } \mathbb{K}(\mathcal{E}) = \{\left(\begin{smallmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : T \in \cup_{t\in G}\mathbb{K}_t(\mathcal{E})\}.$$

En caso que $\mathcal{E}$ sea un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert sabemos (Corolario 2.53) que $\mathcal{A}$ es isomorfo como fibrado de Fell a $\mathbb{K}(\mathcal{E})$, por lo que pensamos $\mathcal{A} = \mathbb{K}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{L}(\mathcal{E})$.

Proposición 2.56. *Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno entonces $C^*(\mathcal{A})$ y $C^*(\mathcal{B})$ isomorfas a las las clausuras de $C_c(\mathcal{A})$ y $C_c(\mathcal{B})$ en $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$, respectivamente.*

Demostración. Basta con notar que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subfibrados hereditarios de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ (observando las filas y columnas nulas de las matrices) y usar el Teorema 2.8. □

Agradecemos a F. Abadie por haber resumido considerablemente los contenidos de esta sección con los dos enunciados siguientes. En versiones anteriores de la tesis la prueba del Teorema 2.58 ocupaba un lugar considerable.

Proposición 2.57. *Sean B una C*-álgebra, R un ideal (cerrado) derecho de B tal que $\overline{\operatorname{span}}\, R^*R = B$ y definamos $A := \overline{\operatorname{span}}\, RR^*$. Si $\pi\colon B \to \mathbb{B}(H)$ es una representación y pensamos a R como un $A-B-$bimódulo de equivalencia, entonces el núcleo de la representación inducida por π a través de R es $A \cap \ker(\pi)$.*

Demostración. Para pensar a los espacios de Hilbert como módulos de Hilbert trabajaremos con productos internos lineales en la segunda variable. Sean $K := R \otimes_\pi H$ y $\pi_A\colon A \to \mathbb{B}(K)$ la representación inducida de π. Dado $a \in A$ se tiene $\pi_A(a) = 0 \Leftrightarrow \forall\, b, c \in R\, h, k \in H : \langle ab\otimes h, c\otimes k\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall\, b, c \in R : \pi(c^*ab) = 0 \Leftrightarrow \pi(R^*aR) = 0$. Puesto que A tiene unidades aproximadas y $A \subset R$ se tiene $\pi(R^*aR) = 0 \Leftrightarrow \pi(a) = 0$. □

Teorema 2.58. *Sea $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ el fibrado de enlace del $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno $\mathcal{E}$, y representemos por $\|\ \|_\bullet$ cualquiera de las C*-normas universal y reducidas de $L^1(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$. Si $\mathcal{F}$ es un subfibrado de Banach de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$, indicamos por $C^*_\bullet(\mathcal{F})$ la clausura de $L^1(\mathcal{F})$ en $C^*_\bullet(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$. Entonces se tiene: $C^*_\bullet(\mathcal{E})$ es un $C^*_\bullet(\mathcal{A})-C^*_\bullet(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia, que induce $N_\mathcal{A}$ en $N_\mathcal{B}$.*

Demostración. Primero trabajaremos con la C*-norma universal, por lo que omitimos el subíndice $\bullet$ en la notación $C^*_\bullet(\ )$. Pesemos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como subfibrados hereditarios de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ como lo indicamos arriba. Consideremos los subfibrados de $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ $\mathcal{L} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ 0 & \mathcal{B} \end{smallmatrix}\right)$ y

$\mathcal{R} := \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{E} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Utilizando que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ tienen unidades aproximadas y el Teorema de Cohen-Hewitt puede mostrarse que

$$\begin{array}{llll} \mathbb{L}(\mathcal{E})\mathcal{L} = \mathcal{L} & \mathcal{L}\mathcal{L}^* = \mathbb{L}(\mathcal{E}) & \mathcal{L}^*\mathcal{L} = \mathcal{B} & \mathcal{L}\mathcal{B} = \mathcal{L} \\ \mathcal{R}\mathbb{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{R} & \mathcal{R}^*\mathcal{R} = \mathbb{L}(\mathcal{E}) & \mathcal{R}\mathcal{R}^* = \mathcal{A} & \mathcal{A}\mathcal{R} = \mathcal{R}. \end{array}$$

Estas igualdades junto con el Teorema 1.1 de [Aba03] (ver el Teorema 2.6 y su Corolario) implican que $C^*(\mathcal{L})$ es un $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E})) - C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia y que $C^*(\mathcal{R})$ es un $C^*(\mathcal{A}) - C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))-$bimódulo de equivalencia.

El producto interno y la acción de estos bimódulos provienen de la estructura de C*-álgebra de $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$, por lo que el producto tensorial $C^*(\mathcal{R})\otimes_{C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))} C^*(\mathcal{L})$ es (unitariamente equivalente a) $\mathcal{X} := \overline{\operatorname{span}}\, C_c(\mathcal{R})C_c(\mathcal{L})$. Dado que $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{E}$, tenemos $C_c(\mathcal{R})C_c(\mathcal{L}) \subset C_c(\mathcal{E})$ y por lo tanto $\mathcal{X} \subset C^*(\mathcal{E})$. Por otro lado de [Aba03, Teorema 3.2] se obtiene $L^1(\mathcal{R})L^1(\mathcal{B}) = L^1(\mathcal{R})$, por lo que si $f \in L^1(\mathcal{E}) \subset L^1(\mathcal{R})$ y $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $L^1(\mathcal{B}) \subset L^1(\mathcal{L})$ entonces $\{f * e_i\}_i \subset \mathcal{X}$ converge en $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ a f. Esto implica que $L^1(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X}$, por lo que $\mathcal{X} = C^*(\mathcal{E})$ es un $C^*(\mathcal{A}) - C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia.

Con respecto a la inducción del núcleo de la representación regular tomemos una representación $\pi\colon C^*(\mathcal{B}) \to \mathbb{B}(H)$ tal que $\ker(\pi) = N_{\mathcal{B}}$. Para mostrar que el ideal inducido por $N_{\mathcal{B}}$ a través de $C^*(\mathcal{E})$ es $N_{\mathcal{A}}$, basta con mostrar que $N_{\mathcal{A}}$ es el ideal inducido por $N_{\mathcal{B}}$ a través de $C^*(\mathcal{R}) \otimes_{C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))} C^*(\mathcal{L})$. Observemos que $C^*(\mathcal{L})$ es un ideal izquierdo en $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ tal que $\overline{\operatorname{span}}\, C^*(\mathcal{L})^*C^*(\mathcal{L}) = C^*(\mathcal{B})$ y $\overline{\operatorname{span}}\, C^*(\mathcal{L})C^*(\mathcal{L})^* = C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$. Luego la versión de la Proposición 2.57 para ideales izquierdos junto con el Teorema 2.8 implica que $C^*(\mathcal{L})$ induce $N_{\mathcal{B}}$ en $N_{\mathbb{L}(\mathcal{E})}$. Usando nuevamente esos resultados se deduce que $C^*(\mathcal{R})$ induce $N_{\mathbb{L}(\mathcal{E})}$ en $N_{\mathcal{A}}$. Luego $C^*(\mathcal{R}) \otimes_{C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))} C^*(\mathcal{L})$ induce $N_{\mathcal{B}}$ en $N_{\mathcal{A}}$.

Para mostrar las afirmaciones concernientes a la norma reducida basta con repasar los argumentos anteriores considerando esa norma. Una demostración más directa se obtiene considerando la representación regular $\Lambda\colon C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E})) \to C^*_r(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$. De lo mostrado anteriormente se deduce directamente que $C^*_r(\mathcal{E}) = \Lambda(C^*(\mathcal{E}))$ es un $\Lambda(C^*(\mathcal{A})) - \Lambda(C^*(\mathcal{A}))-$bimódulo de equivalencia, mientras que la Proposición 2.3 nos dice que $C^*_r(\mathcal{A}) = \Lambda(C^*(\mathcal{A}))$ y que $C^*_r(\mathcal{B}) = \Lambda(C^*(\mathcal{B}))$. □

Corolario 2.59. *Supongamos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno sobre G, por lo que es un $\mathbb{K}(\mathcal{E})-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno. Luego, como C*-álgebras, $\mathbb{K}(C^*(\mathcal{E}))$ es isomorfo a $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y $\mathbb{L}(C^*(\mathcal{E}))$ lo es a $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$. Si $\mathcal{E} = \mathcal{B}$, considerado como fibrado de Fell-Hilbert sobre sí mismo, entonces $C^*(\mathcal{E})$ es la C*-álgebra $C^*(\mathcal{B})$ con su estructura natural $C^*(\mathcal{B})-$módulo de Hilbert.*

Demostración. De la Teoría general de bimódulos de equivalencia (ver por ejemplo [RW98]) sabemos que si $\mathcal{X}$ es un $A-B-$bimódulo de equivalencia entonces A es isomorfo a $\mathbb{K}(\mathcal{X})$. El Teorema anterior nos dice que $C^*(\mathcal{E})$ es un $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))-C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia, por lo que $\mathbb{K}(C^*(\mathcal{E}))$ es isomorfo a $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$.

Para identificar $\mathbb{L}(C^*(\mathcal{E}))$ con $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ utilizaremos que $\mathbb{L}(C^*(\mathcal{E}))=\mathbb{K}(C^*(\mathcal{E})\oplus C^*(\mathcal{B}))$. Dadas $f\in C_c(\mathcal{E})$ y $g\in C_c(\mathcal{B})$ definamos $\mu(f\oplus g)\in C_c(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})\subset C_c(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ como $\mu(f\oplus g)(t)=f(t)\oplus g(t)$. Operando en $C_c(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ tenemos que

$$\langle\mu(f\oplus g),\mu(h\oplus k)\rangle = f^* * h + g^* * k = \langle f\oplus g, h\oplus k\rangle;$$

con lo cual $\mu\colon C_c(\mathcal{E})\oplus C_c(\mathcal{B})\to C_c(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})$ tiene una única extensión lineal e inyectiva que preserva el producto interno. Además $\mu(C_c(\mathcal{E})\oplus C_c(\mathcal{B}))=C_c(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})$, por lo que la extensión de μ es un unitario de $C^*(\mathcal{E})\oplus C^*(\mathcal{B})$ en $\mathcal{X}:=\overline{C_c(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})}$. Considerando a $\mathbb{K}(\mathcal{E}\oplus\mathcal{B})$ como $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ deducimos que $\mathcal{X}\mathcal{X}^*$ es denso en $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$, por lo que $\mathbb{L}(C^*(\mathcal{E}))$ es isomorfo a $\mathbb{K}(\mathcal{X})=C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$.

Aún resta mostrar la afirmación referente al caso $\mathcal{E}=\mathcal{B}$. Con la inclusión $\mathcal{B}\subset\mathbb{L}(\mathcal{E})$ la identificación $C^*(\mathcal{E})=C^*(\mathcal{B})$ se deduce directamente del Teorema 2.8. □

Sin necesidad de una demostración, del teorema anterior obtenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 2.60. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fibrados de Fell sobre G de manera que existe un $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert pleno entonces existe un $C^*(\mathcal{A})-C^*(\mathcal{B})-$bimódulo de equivalencia de Morita que induce el núcleo de la representación regular de derecha a izquierda; por lo que $C^*_r(\mathcal{A})$ es Morita equivalente a $C^*_r(\mathcal{B})$.*

También de la demostración del teorema anterior se obtiene lo siguiente, sin necesidad de una demostración.

Corolario 2.61. *Para todo $\mathcal{A}-\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert $\mathcal{E}$ existe un bimódulo de equivalencia de Morita que induce el núcleo de la representación regular de derecha a izquierda entre cualesquiera dos de las C^*-álgebras nombradas a continuación:*

$$C^*(\mathcal{A}),\ C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E})),\ C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))\ \text{y}\ C^*(\mathcal{B}).$$

Además las respectivas C^*-álgebras seccionales reducidas son equivalentes Morita y $\mathcal{B}$ es promediable $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ es promediable $\Leftrightarrow$ $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ es promediable $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}(\mathcal{E})$ es promediable.

Los siguientes dos resultados son parte de [Aba03, AMP09], los incluimos aquí para referencia futura y porque se deducen de los resultados anteriores de forma directa.

Corolario 2.62. *Para toda acción parcial en módulos de Hilbert γ de G en $\mathcal{X}_A$ existe bimódulo de equivalencia de Morita que induce el núcleo de la representación regular de un lado a otro entre cualquiera de los productos cruzados*

$$\mathbb{K}(\mathcal{X}) \rtimes_{\gamma^l} G,\ A \rtimes_{\gamma^r} G \text{ y } \mathbb{L}(\mathcal{X}) \rtimes_{\mathbb{L}(\gamma)} G.$$

Además los respectivos productos cruzados son equivalentes Morita y γ^l es promediable $\Leftrightarrow$ γ^r es promediable $\Leftrightarrow$ $\mathbb{L}(\gamma)$ es promediable.

Para terminar este capítulo mostramos un resultado sobre representaciones de fibrados, relacionada con fibrados de Fell-Hilbert y multiplicadores.

Teorema 2.63. *Supongamos G es un grupo HLC, $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert sobre G y que $\mathcal{A}$ es un fibrado de Fell sobre G. Si a cada $a \in \mathcal{A}_t$ ($t \in G$) le asignamos un operador adjuntable Φ_a de $\mathcal{E}$ de orden t de manera que:*

(a) $\Phi_{a+\lambda b} = \Phi_a + \lambda\Phi_b$, *para todo* $a, b \in \mathcal{A}_t$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $t \in G$.

(b) $\Phi_{ab} = \Phi_a \circ \Phi_b$ *y* ${\Phi_a}^* = \Phi_{a^*}$ *para todo* $a, b \in \mathcal{A}$.

(c) La función $\mathcal{A} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $(a, x) \mapsto \Phi_a x$, *es continua.*

Entonces existe una única $*-$representación $T \colon \mathcal{A} \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}))$ de manera que para toda $f \in C_c(\mathcal{E})$, $a \in \mathcal{A}_r$ y $t \in G$ $T_a(f)(t) = \Phi_a f(r^{-1}t)$. Además, si $\widetilde{T}$ es la forma integrada de T, entonces para toda $f \in C_c(\mathcal{A})$, $g \in C_c(\mathcal{E})$ y $t \in G$ se cumple que $\widetilde{T}_f(g) \in C_c(\mathcal{E})$ y $\widetilde{T}_f(g)(t) = \int_G \Phi_{f(r)} g(r^{-1}t)\, dr$.

Demostración. Para cada $a \in \mathcal{A}_t$ definamos $\lambda_a, \mu_a \colon \mathbb{K}(\mathcal{E}) \to \mathbb{K}(\mathcal{E})$ como $\lambda_a(S) = \Phi_a \circ S$ y $\mu_a(S) = S \circ \Phi_a$. Probemos que para $a \in A_t$ el par $\Psi_a := (\lambda_a, \mu_a)$ es un multiplicador de orden t del fibrado $\mathbb{K}(\mathcal{E})$, en el sentido de [FD88, VIII 2.14]. En efecto, las igualdades $\lambda_a(ST) = \lambda_a(S)T$, $S\mu_a(T) = \mu_a(ST)$ y $S\mu_a(T) = \lambda_a(S)T$ son consecuencia inmediata de la asociatividad de la composición de funciones. Además el Lema 2.47 nos dice que $\lambda_a(\mathbb{K}(\mathcal{E})_r) \subset \mathbb{K}(\mathcal{E})_{tr}$ y que $\mu_a(\mathbb{K}(\mathcal{E})_r) \subset \mathbb{K}(\mathcal{E})_{rt}$ y es inmediato que tanto λ_a como μ_a son lineales en cada fibra. Necesitamos mostrar que λ_a y μ_a son acotados. Para esto observemos que $\Phi|_{\mathcal{A}_e} \colon \mathcal{A}_e \to \mathbb{B}_e(\mathcal{E})$ es un $*-$homomorfismo entre C*-álgebras, por lo que es contractivo. Luego, para todo $a \in \mathcal{A}$ y $S \in \mathbb{K}(\mathcal{E})$:

$$\|\lambda_a(S)\|^2 = \|S^* \circ \Phi_a^* \circ \Phi_a \circ S\| = \|S^* \circ \Phi_{a^*a} \circ S\| \leq \|S\|^2 \|a^*a\| = \|S\|^2\|a\|^2,$$

lo que implica $\|\lambda_a(S)\| \leq \|a\|\|S\|$. La desigualdad $\|\mu_a(S)\| \leq \|a\|\|S\|$ se obtiene de

$$\|\mu_a(S)\| = \|(S \circ \Phi_a)^*\| = \|\Phi_{a^*} \circ S^*\| = \|\lambda_{a^*}(S^*)\| \leq \|a^*\|\|S^*\| = \|a\|\|S\|.$$

Probemos que λ_a es continua usando la Proposición A.1. Usaremos el homeomorfismo $m_t\colon G \to G,\ s \mapsto ts$, donde $a \in \mathcal{A}_t$. Como conjunto de secciones $\Gamma \subset C(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ tomemos aquél formado por todas las funciones $u\colon G \to \mathbb{K}(\mathcal{E})$ para las cuales existen $r_j \in G$ y $f_j, g_j \in C_c(\mathcal{E})$ $(j = 1, \ldots, n)$ tales que $u(s) = \sum_{j=1}^n |f_j(sr_j)\rangle\langle g_j(r_j)|$. De la demostración del Corolario 2.51 se deduce que para todo $s \in G$ $\{u(t)\colon u \in \Gamma\}$ es denso en $\mathbb{K}_s(\mathcal{E})$. Por otro lado, con u como antes:

$$\lambda_a \circ u \circ m_t^{-1}(s) = \sum_{j=1}^n |\Phi_a(f_j(t^{-1}sr_j))\rangle\langle g_j(r_j)|,$$

con $h_j(s) := \Phi_a(f(t^{-1}s))$ se tiene $h_j \in C_c(\mathcal{E})$ y $\lambda_a \circ u \circ m_t^{-1}(s) = \sum_{j=1}^n |h_j(sr_j)\rangle\langle g_j(r_j)|$. Luego $\lambda_a \circ u \circ m_t^{-1} \in \Gamma$ y λ_a es continua. Para mostrar que μ_a es continua basta con observar que $\mu_a(S) = S \circ \Phi_a = (\lambda_{a^*}(S^*))^*$. Con esto terminamos de mostrar que Ψ_a es un multiplicador de $\mathbb{K}(\mathcal{E})$.

Apelando a [FD88, VIII 5.8] deducimos que para cada $a \in \mathcal{A}_t$ existe un único multiplicador Ψ'_a de $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ tal que $\Psi'_a(f)(s) = \Psi_a f(t^{-1}s)$, para toda $f \in C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y $s \in G$.

Probemos ahora que todo multiplicador de $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ se extiende a un multiplicador de $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$. Tomemos una $*-$representación fiel y no degenerada $\pi\colon C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E})) \to B(H)$, por lo que la restricción de π a $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ es fiel y no degenerada. Luego $\{\pi(f)x\colon f \in L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E})), x \in H\}$ es denso en H y $\{\pi(a)\colon \|a\|_1 < 1\}$ es una familia equicontinua. Además $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ tiene una unidad aproximada, por lo que las Proposiciones 1.11 y 1.12 de [FD88, VIII] implican que para cada multiplicador M de $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ existe un único $\overline{\pi}(M) \in B(H)$ tal que $\overline{\pi}(M)\pi(a) = \pi(Ma)$ y $\pi(a)\overline{\pi}(M) = \pi(aM)$. Luego $a \mapsto Ma$ y $a \mapsto aM$ son acotadas con respecto a la C*-norma universal de $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y por lo tanto existe un único multiplicador $\overline{M}$ de $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ cuya restricción a $L^1(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ es M.

Definamos $R\colon \mathcal{A} \to M(C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E})))$ como $R_a := \overline{\Psi'_a}$. La unicidad del multiplicador $\overline{M}$ descrita en el párrafo anterior y las condiciones (a) y (b) de la hipótesis implican que R es lineal en cada fibra y que para todo $a, b \in \mathcal{A}$ se cumple que $R_{ab} = R_a R_b$ y $R_a^* = R_{a^*}$.

Para probar que R es una $*-$representación basta con mostrar que existe un conjunto denso $C \subset C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ tal que, para toda $u \in C$, $a \mapsto R_a(u)$ es continua. Tomemos $C = \Gamma$, con Γ como antes. Notemos que $C_c(G)\Gamma \subset \Gamma$ y que, como lo observamos antes, $\{u(t)\colon t \in \Gamma\}$ es denso en $\mathbb{K}_t(\mathcal{E})$ para todo $t \in G$. Luego (Lema A.5) Γ es denso en la topología del límite inductivo en $C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y por lo tanto es denso en $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$.

Mostrar la continuidad de $a \mapsto R_a(u)$ para todo $u \in \Gamma$ es equivalente a mostrar la continuidad para u de la forma $s \mapsto |f(st)\rangle\langle g(t)|$, con $f, g \in C_c(\mathcal{E})$ y $t \in G$. Si $\rho\colon \mathcal{A} \to G$ es la proyección de $\mathcal{A}$ entonces, con $u(s) = |f(st)\rangle\langle g(t)|$, se tiene $R_a(u)(s) =$

$|\Phi_a f(\rho(a)^{-1}st)\rangle\langle g(t)|$. Luego $\mathrm{sop}(R_a(u)) \subset \rho(a)\mathrm{sop}(f)t^{-1}$ y basta con mostrar que $a \mapsto R_a(u)$ es uniformemente continua. Esto último se deduce fácilmente de la hipótesis (c) y de que para todo $x \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned}\|(R_a(u)(s) - R_b(u)(s))x\| &= \|(\Phi_a f(\rho(a)^{-1}st) - \Phi_b f(\rho(b)^{-1}st))\langle g(t), x\rangle\| \\ &\leq \|\Phi_a f(\rho(a)^{-1}st) - \Phi_b f(\rho(b)^{-1}st)\|\|g\|\|x\|.\end{aligned}$$

De la identificación $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E})) = \mathbb{K}(C^*(\mathcal{E}))$ se obtiene $M(C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E}))) = M(\mathbb{K}(C^*(\mathcal{E}))) = \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}))$. Esto nos da una única $*-$representación $T\colon \mathcal{A} \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}))$ tal que $T_a(f*g) = R_a(f)*g$, para todo $f \in C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y $g \in C_c(\mathcal{E})$ (donde $*$ es la multiplicación de $C_c(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$).

Tomemos $f \in C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y $g \in C_c(\mathcal{E})$. Luego $R_a(f) \in C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$, por lo que $T_a(f*g) = R_a(f)g \in C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))C_c(\mathcal{E}) \subset C_c(\mathcal{E})$. Además, para $a \in \mathcal{A}_t$,

$$\begin{aligned}T_a(f*g)(s) = R_a(f)*g(s) &= \int_G R_a(f)(r)g(r^{-1}s)\,dr \\ &= \int_G \Phi_a(f(t^{-1}r))g(r^{-1}s)\,dr = \int_G \Phi_a(f(t^{-1}r)g(r^{-1}s))\,dr \\ &= \Phi_a\left(\int_G f(r)g(r^{-1}t^{-1}s)\,dr\right) = \Phi_a(f*g(t^{-1}s)).\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Supongamos ahora que $\{f_i\}_{i\in I} \subset C_c(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ es una unidad aproximada de $C^*(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ como la construida en [FD88, VIII 5.11]. Lo que es más, observando la construcción de Fell y Doran fácilmente podemos asegurarnos de que $f_i(t) \in \mathbb{L}(\mathcal{E})$ sea una matriz diagonal para todo $t \in G$ e $i \in I$. Luego cada f_i es una suma de un elemento $f_{i,1} \in C_c(\mathbb{K}(\mathcal{E}))$ y un elemento $f_{i,2} \in C_c(\mathcal{B})$. Esta construcción nos asegura que $f_i * g = f_{i,1} * g$ y, que $\{f_{i,1} * g\}_{i\in I} \subset C_c(\mathcal{E})$ converge en la topología del límite inductivo de $C_c(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ a g. Repasando los argumentos de [FD88, VIII 5.11] observamos que la convergencia es también en la topología del límite inductivo de $C_c(\mathcal{E})$. De lo anterior se desprende que $\{T_a(f_{i,1} * g)\}_i$ converge a $T_a(g)$ en $C^*(\mathcal{E})$. Por otro lado la función $F\colon C_c(\mathcal{E}) \to C_c(\mathcal{E})$ dada por $F_a(u)(s) = \Phi_a(f(t^{-1}s))$, es continua en la topología del límite inductivo porque para cada compacto $K \subset G$ se tiene $F_a(C_K(\mathcal{E})) \subset C_{tK}(\mathcal{E})$ y la restricción de F_a a $C_K(\mathcal{E})$ es un operador acotado por $\|a\|$. Luego $\{F_a(f_{i,1} * g)\}_i$ converge a $F_a(g)$ en la topología del límite inductivo de $C_c(\mathcal{E})$, por lo tanto también en la topología del límite inductivo de $C_c(\mathbb{L}(\mathcal{E}))$ y en $C^*(\mathcal{E})$. Las igualdades de la Ecuación 2.5.3 implican que $F_a(f_{i,1} * g) = T_a(f_{i,1} * g)$, por lo que $T_a(g) = F_a(g) \in C_c(\mathcal{E})$.

Probemos ahora la afirmación referente a $\widetilde{T}_f(g)$, para $f \in C_c(\mathcal{A})$ y $g \in C_c(\mathcal{E})$. Definamos $u\colon G \times \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ como $u(a,t) = \Phi_a f(\rho(a)^{-1}t) = T_a(f)$. Que u es continua se deduce de (c). Además u tiene soporte $\mathcal{A}-$localmente controlado (Sección A.4) porque dado $a_0 \in \mathcal{A}$, si U es un entorno compacto de $\rho(a_0)$, entonces $V := \cup_{t\in U}\mathcal{A}_t$ es un entorno de a_0 de manera que si $(a,t) \in V \times (G - U\mathrm{sop}(f))$ entonces $u(a,t) = 0$. El Lema A.6 implica que $\mathcal{A} \to C_c(\mathcal{E})$, $a \mapsto T_a(f)$, es continua en la topología del límite inductivo, por lo que $v\colon G \to C_c(\mathcal{E})$, $v(t) = T_{f(t)}(g)$, es continua en la topología del límite inductivo. Además $\mathrm{sop}(v) \subset \mathrm{sop}(f)$ y $\mathrm{sop}(v(t)) \subset \mathrm{sop}(f)\mathrm{sop}(g) =: K$, por lo que podemos pensar a $v \in C_c(G, C_K(\mathcal{E}))$. Si $\iota\colon C_K(\mathcal{E}) \to C^*(\mathcal{E})$ es la inclusión canónica entonces $\iota(\int_G v(r)\,dr) = \int_G \iota(v(r))\,dr = \widetilde{T}_f(g)$, lo que implica $\widetilde{T}_f(g) \in C_c(\mathcal{E})$. Por otra parte, si $\mathrm{ev}_t\colon C_K(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}_t$ es la evaluación en $t \in G$ entonces $\widetilde{T}_f(g)(t) = \mathrm{ev}_t(\int_G v(r)\,dr) = \int_G v(r)(t)\,dr = \int_G \Phi_{f(r)} g(r^{-1}t)\,dr$. □

Ejemplo 2.5. Supongamos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}-$fibrado de Fell-Hilbert y para cada $a \in \mathbb{K}(\mathcal{E})$ definamos $\Phi_a\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ como $\Phi_a(x) = ax$. En esta situación las hipótesis del Teorema anterior se satisfacen[5] y la forma integrada $\widetilde{T}\colon C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E})) \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}))$ es exactamente la inclusión canónica de $C^*(\mathbb{K}(\mathcal{E})) = \mathbb{K}(C^*(\mathcal{E}))$ en $\mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}))$.

El caso concreto que nos interesa es el que describimos a continuación.

Supongamos que β es una C*-acción parcial de G en B, γ una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y que $\phi\colon B \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ es un homomorfismo fuertemente no degenerado y equivariante. Como siempre $\alpha = \gamma^r$.

Teorema 2.64. *Para cada $b\delta_s \in \mathcal{B}\beta$ la función $\Theta_{b\delta_s} : \mathcal{E}\gamma \to \mathcal{E}\gamma$ definida por $\Theta_{b\delta_s}(x\delta_t) := \gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x)\delta_{st}$, es un operador adjuntable de orden s. Además Θ cumple las condiciones (a)-(c) del Teorema 2.63.*

Demostración. Observemos que $\Theta_{b\delta_s}$ está definido porque si $x\delta_t \in \mathcal{E}\gamma$ entonces

$$\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x \in \phi(B_{s^{-1}})\mathcal{X}_t = \phi(B_{s^{-1}})\mathcal{X}A_t = \mathcal{X}_{s^{-1}}A_t = \mathcal{X}_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}_t.$$

Eso implica que $\gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x) \in \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st}$ y que $\gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x)\delta_{st} \in \mathcal{E}\gamma_{st}$.

La continuidad de $\Phi_{b\delta_s}$ se deduce de la continuidad de γ, de forma que $\Phi_{b\delta_s^*}$ también es continua. Mostrar que $\langle \Phi_{b\delta_s} x\delta_r, y\delta_t\rangle = \langle x\delta_r, \Phi_{b\delta_s^*} y\delta_t\rangle$ equivale a mostrar que $\langle \gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x)\delta_{sr}, y\delta_t\rangle = \langle x\delta_r, \gamma_{s^{-1}}(\phi(\beta_s(\beta_{s^{-1}}(b^*)))y)\delta_{st}\rangle$. Esa igualdad es equivalente a $\alpha_{r^{-1}s^{-1}}\left(\langle \gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x), y\rangle\right) = \alpha_{r^{-1}}\left(\langle x, \gamma_{s^{-1}}(\phi(b^*)y)\rangle\right)$. Llamemos z al primer miembro y w al segundo, de la igualdad anterior. Por un lado

$$z \in \alpha_{r^{-1}s^{-1}}\left(\langle \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{sr}, \mathcal{X}_t\rangle\right) \subset A_{r^{-1}} A_{r^{-1}s^{-1}} A_{r^{-1}s^{-1}t}$$

y por otro $w \in \alpha_{r^{-1}}(\langle \mathcal{X}_r, \mathcal{X}_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}_{s^{-1}t}\rangle) \subset A_{r^{-1}} A_{r^{-1}s^{-1}} A_{r^{-1}s^{-1}t}$. Luego para mostrar que $z = w$ basta con probar que $zb = wb$ para todo $b \in A_{r^{-1}} A_{r^{-1}s^{-1}} A_{r^{-1}s^{-1}t}$.

[5] Por la propia definición de las operaciones de $\mathbb{K}(\mathcal{E})$.

Para todo $b \in A_{r^{-1}}A_{r^{-1}s^{-1}}A_{r^{-1}s^{-1}t}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
zb &= \alpha_{r^{-1}s^{-1}}\left(\langle\gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x),y\rangle\right)b = \alpha_{r^{-1}s^{-1}}\left(\langle\gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x),y\alpha_{sr}(b)\rangle\right)\\
&= \alpha_{r^{-1}s^{-1}}\alpha_s\left(\langle\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x,\gamma_{s^{-1}}(y\alpha_{sr}(b))\rangle\right) = \alpha_{r^{-1}}\left(\langle x,\phi(\beta_{s^{-1}}(b^*))\gamma_{s^{-1}}(y\alpha_{sr}(b))\rangle\right)\\
&= \alpha_{r^{-1}}\left(\langle x,\gamma_{s^{-1}}(\phi(b^*)y\alpha_{sr}(b))\rangle\right) = \alpha_{r^{-1}}\left(\langle x,\gamma_{s^{-1}}(\phi(b^*)y)\rangle\alpha_r(b)\right)\\
&= \alpha_{r^{-1}}\left(\langle x,\gamma_{s^{-1}}(\phi(b^*)y)\rangle\alpha_r(b)\right) = \alpha_{r^{-1}}\left(\langle x,\gamma_{s^{-1}}(\phi(b^*)y)\rangle\right)b = wb.
\end{aligned}$$

Lo anterior prueba que $\Phi_{b\delta_s}^* = \Phi_{b\delta_s^*}$. Además la linealidad de Φ en cada fibra se demuestra usando la linealidad de γ y de ϕ. Para mostrar que Φ es multiplicativo tomemos $a\delta_r, b\delta_s \in \mathcal{B}\beta$. Para todo $x\delta_t \in \mathcal{E}\gamma$ tenemos que

$$\Phi_{a\delta_r}\circ\Phi_{b\delta_s}(x\delta_t) = \Phi_{a\delta_r}\left(\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\right)\delta_{st}\right) = \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a))\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\right)\right)\delta_{rst}$$

y también que

$$\begin{aligned}
\Phi_{a\delta_r b\delta_s}(x\delta_t) = \Phi_{\beta_r(\beta_{r^{-1}}(a)b)\delta_{rs}}(x\delta_t) &= \gamma_{rs}\left(\phi(\beta_{s^{-1}r^{-1}}(\beta_r(\beta_{r^{-1}}(a)b)))x\right)\delta_{rst}\\
&= \gamma_{rs}\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(\beta_{r^{-1}}(a)b))x\right)\delta_{rst}.
\end{aligned}$$

Las igualdades de arriba nos dice que, para demostrar que Φ es multiplicativa, basta con probar que $z := \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a))\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\right)\right)$ es $w := \gamma_{rs}\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(\beta_{r^{-1}}(a)b))x\right)$.

Por un lado $z \in \gamma_r(\mathcal{X}_{r^{-1}}\cap\mathcal{X}_s\cap\mathcal{X}_{st}) = \mathcal{X}_r\cap\mathcal{X}_{rs}\cap\mathcal{X}_{rst} = \mathcal{X}(A_rA_{rs}A_{rst})$ y por otro $w \in \gamma_{rs}\left(\mathcal{X}_{s^{-1}}\cap\mathcal{X}_{s^{-1}r^{-1}}\cap\mathcal{X}_t\right) = \mathcal{X}(A_rA_{rs}A_{rst})$. Entonces la igualad $z = w$ quedará demostrada una vez que probemos que $zc = wc$, para todo $c \in A_rA_{rs}A_{rst}$. Para c en esa situación se cumple que

$$\begin{aligned}
zc &= \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a))\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\right)\right)c = \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a))\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\right)\alpha_{r^{-1}}(c)\right)\\
&= \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a))\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\alpha_{s^{-1}r^{-1}}(c)\right)\right) = \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a))\phi(b)\gamma_s\left(x\alpha_{s^{-1}r^{-1}}(c)\right)\right)\\
&= \gamma_r\left(\phi(\beta_{r^{-1}}(a)b)\gamma_s\left(x\alpha_{s^{-1}r^{-1}}(c)\right)\right) = \gamma_r\left(\gamma_s\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(\beta_{r^{-1}}(a)b))x\alpha_{s^{-1}r^{-1}}(c)\right)\right)\\
&= \gamma_{rs}\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(\beta_{r^{-1}}(a)b))x\alpha_{s^{-1}r^{-1}}(c)\right) = \gamma_{rs}\left(\phi(\beta_{s^{-1}}(\beta_{r^{-1}}(a)b))x\right)c = wc.
\end{aligned}$$

Que cada $\Phi_{b\delta_s}$ es acotado se deduce fácilmente de

$$\|\Phi_{b\delta_s}x\delta_t\| = \|\gamma_s(\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x)\delta_{st}\| = \|\phi(\beta_{s^{-1}}(b))x\| \leq \|b\|\|x\| = \|b\delta_s\|\|x\delta_r\|.$$

Finalmente, la continuidad de $\mathcal{B}\beta\times\mathcal{E}\gamma\to\mathcal{E}\gamma$, $(a,x)\mapsto\Phi_a x$, se deduce directamente de la continuidad de γ y β. $\square$

Corolario 2.65. *Con las hipótesis del Teorema anterior existe una $*-$representación $T\colon \mathcal{B}\beta \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}\gamma))$ de manera que para todo $f \in C_c(\mathcal{B}\beta)$ y $g \in C_c(\mathcal{E})$ se cumple que $\widetilde{T}_f(g) \in C_c(\mathcal{E}\gamma)$ y $\widetilde{T}_f(g)(t) = \int_G \Theta_{f(s)} g(s^{-1}t)\, ds$.*

Demostración. Se deduce directamente de los resultados anteriores. $\square$

Capítulo 3

Globalización de acciones parciales

Los resultados principales de este capítulo son dos teoremas que dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de globalizaciones de acciones parciales en C*-álgebras y en módulos de Hilbert.

Comenzaremos por ocuparnos de la situación en C*-álgebras y pasaremos a los módulos de Hilbert por intermedio de la *linking algebra*.

3.1. C*-álgebras

Veamos una condición necesaria para poder globalizar una acción parcial en C*-álgebras. Asumamos que α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A y que (β, ι, C, B) es una globalización de α.

Tomemos $(t, a, b) \in G \times A \times A$. Observemos que $\beta_t(\iota(a))\iota(b) \in \beta_t(B) \cap B = B_t = \iota(A_t)$. Definamos $u_t(a, b) := \iota^{-1}(\beta_t(\iota(a))\iota(b))$. Para determinar $u_t(a, b)$ basta con determinar los productos $u_t(a, b)c$, con $c \in A_t$ arbitrario porque $u_t(a, b) \in \iota^{-1}(\beta_t(B)B) = A_t$. Usando que $\iota\colon \alpha \to \beta|_B$ es un isomorfismo obtenemos las igualdades $\iota(u_t(a, b)c) = \beta_t(\iota(a))\iota(bc) = \beta_t(\iota(a\alpha_{t^{-1}}(bc))) = \iota(\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(cb)))$, por lo que $u_t(a, b)c = \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(cb))$.

Antes de mostrar que la anterior es una condición suficiente mostramos un Lema que caracteriza la norma del álgebra envolvente. Enunciamos ese resultado en términos de módulos para utilizarlo más adelante. La idea de la prueba fue tomada de [Aba03, Teorema 2.1].

Lema 3.1. *Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$. Luego para cada ideal I de A y cada $x \in \overline{[\gamma \mathcal{X} I]}$ se cumple que*

$$\|x\| = \sup\{\|x\gamma_t^r(a)\| \colon a \in IA_{t^{-1}},\ \|a\| \leq 1,\ t \in G\}.$$

Demostración. Comenzaremos mostrando el resultado para el caso en que $\mathcal{X}$ es una C*-álgebra con su estructura natural de módulo (sobre sí misma). Suponemos entonces que $\mathcal{X} = A$ y $\gamma = \gamma^r$. Sea B la C*-álgebra formada por las funciones acotadas $f \colon G \to A$ tales que $f(t) \in \gamma_t(A_{t^{-1}}I)$, para todo $t \in G$. Las operaciones en B son punto a punto y la norma es la del supremo.

Para cada $a \in \overline{[\gamma I]}$ definamos $\pi(a) \colon B \to B$ de manera que $(\pi(a)f)(t) = af(t)$. Puede mostrarse con facilidad que $\pi(a)$ es un multiplicador de B con adjunto $\pi(a^*)$. También puede mostrarse fácilmente que $\pi \colon \overline{[\alpha I]} \to M(B),\ a \mapsto \pi(a)$, es un $*-$homomorfismo. El punto clave es mostrar que π es inyectivo.

Si $\pi(a) = 0$ entonces $ab = 0$ para todo $b \in \gamma_t(A_{t^{-1}}I)$ y todo $t \in G$. Luego $a\overline{[\alpha I]} = 0$, lo que implica que $a = 0$. Por lo tanto π es una isometría y

$$\|a\| = \|\pi(a)\| = \sup\{\|a\gamma_t(b)\| \colon b \in A_{t^{-1}}I,\ \|b\| \leq 1,\ t \in G\}.$$

Esto prueba la tesis en el caso en que $\mathcal{X}$ es una C*-álgebra. Volvamos al caso general. Si $x \in \overline{[\gamma \mathcal{X} I]} = \mathcal{X}\overline{[\gamma^r I]}$ entonces $\langle x|x\rangle^{1/2} \in \overline{[\gamma^r I]}$ y

$$\begin{aligned}
\|x\| = \|\langle x|x\rangle^{1/2}\| &= \sup\{\|\langle x|x\rangle^{1/2}\alpha_t(b)\| \colon b \in A_{t^{-1}}I,\ \|b\| \leq 1,\ t \in G\} \\
&= \sup\{\|\alpha_t(b^*)\langle x|x\rangle\alpha_t(b)\|^{1/2} \colon b \in A_{t^{-1}}I,\ \|b\| \leq 1,\ t \in G\} \\
&= \sup\{\|x\alpha_t(b)\| \colon b \in A_{t^{-1}}I,\ \|b\| \leq 1,\ t \in G\}.
\end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema es una versión para C*-álgebras del Teorema 3.1 de [DDRS07]. La idea es utilizar que toda C*-álgebra A es $s-$unital en un sentido aproximado: dados $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ existe $b \in A$ tal que $\|a - ba\| < \varepsilon$ (ver los comentarios previos al Lema 2.4 en [DDRS07]).

Teorema 3.2. *Sea α una acción parcial en C*-álgebras de G en A. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) α tiene una globalización.

(b) Para cada $(t,a,b) \in G \times A \times A$ *existe (un único) elemento* $u_t(a,b) \in A_t$ *tal que* $u_t(a,b)c = \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(bc))$ *para todo* $c \in A_t$.

Demostración. El directo se deduce de la discusión previa al enunciado, por lo que basta con mostrar el recíproco. Sean A^G el conjunto de las funciones de G en A y $\mathcal{X} := \{f \in A^G \colon \sup_{t\in G} \|f(t)\| < \infty\}$, equipado con las operaciones punto a punto y la norma del supremo. Pensaremos a $\mathcal{X}$ como una C*-álgebra y un módulo de Hilbert sobre sí mismo.

Definamos $\lambda \colon G \to Aut(\mathcal{X})$ de manera que $\lambda_t(b)(s) = b(t^{-1}s)$. A partir de λ definimos $\beta \colon G \to Aut(\mathbb{B}(\mathcal{X}))$ como $\beta_t(T) = \lambda_{t^{-1}} \circ T \circ \lambda_t$. Observemos que β_t está definida porque para todo $f, g \in \mathcal{X}$

$$(\beta_t(T)(f))^* g = \lambda_t(T(\lambda_{t^{-1}}(f))^* \lambda_{t^{-1}}(g)) = \lambda_t(\lambda_{t^{-1}}(f)^* T \circ \lambda_{t^{-1}}(g)) = f^* \beta_t(T)(g).$$

Ahora construiremos un $*-$homomorfismo $\iota \colon A \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$. Afirmamos que para cada $a \in A$ existe un único operador $\iota(a) \in \mathbb{B}(\mathcal{X})$ tal que $\iota(a)f(r) = u_{r^{-1}}(a, f(r))$. El adjunto de $\iota(a)$ debería ser $\iota(a^*)$, por lo que para mostrar que $\iota(a)$ está definido basta con mostrar que $u_{r^{-1}}(a, f(r))^* g(r) = f^*(r) u_{r^{-1}}(a^*, g(r))$ ($\forall\ f, g \in \mathcal{X}$ y $r \in G$). Observemos que ambos miembros de la igualdad pertenecen a $A_{r^{-1}}$, por lo que si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $A_{r^{-1}}$ entonces

$$\begin{aligned}
u_{r^{-1}}(a, f(r))^* g(r) &= \lim_i e_i u_{r^{-1}}(a, f(r))^* g(r) = \lim_i \alpha_{r^{-1}}(a\alpha_r(f(r)e_i))^* g(r) e_i \\
&= \lim_i \alpha_{r^{-1}}(\alpha_r(e_i f^*(r)) a^*)^* g(r) e_i = \lim_i \alpha_{r^{-1}}(\alpha_r(e_i f^*(r)) a^* \alpha_r(g(r)e_i)) \\
&= \lim_i e_i f^*(r) \alpha_{r^{-1}}(a^* \alpha_r(g(r)e_i)) = \lim_i e_i f^*(r) u_{r^{-1}}(a^*, g(r)) e_i \\
&= f^*(r) u_{r^{-1}}(a^*, g(r)).
\end{aligned}$$

La unicidad de los elementos $u_t(a,b)$ (dada por la existencia de unidades aproximadas) implica que cada u_t es lineal en ambas variables, lo que a su vez implica que ι es lineal y que cada $\iota(a)$ es lineal (cosa que ya sabemos pues $\iota(a)$ es adjuntable).

La condición de que ι sea multiplicativo es equivalente a que $u_r(a, u_r(b,c)) = u_r(ab, c)$ $\forall\, a, b, c \in A,\ r \in G$. Para mostrar esa igualdad observemos sus dos miembros pertenecen a A_r. Luego, si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de A_r :

$$\begin{aligned}
u_r(a, u_r(b,c)) &= \lim_i u_r(a, u_r(b,c))e_i = \lim_i \alpha_r(a\alpha_{r^{-1}}(u_r(b,c)e_i)) \\
&= \lim_i \alpha_r(a\alpha_{r^{-1}}(\alpha_r(b\alpha_{r^{-1}}(ce_i)))) = \lim_i \alpha_r(ab\alpha_{r^{-1}}(ce_i)) \\
&= \lim_i u_r(ab,c)e_i = u_r(ab,c).
\end{aligned}$$

Probemos ahora que $\iota\colon \alpha \to \beta$ es un morfismo de acciones parciales en C*-álgebras. Sabemos que ι es un $*-$homomorfismo y, como β es global, tan sólo debemos mostrar que $\iota(\alpha_t(a)) = \beta_t(\iota(a))$, para todo $t \in G$ y $a \in A_{t^{-1}}$. Esa igualdad es equivalente a que $u_{r^{-1}}(\alpha_t(a), f(r)) = u_{r^{-1}t}(a, f(r))$, para toda $f \in \mathcal{X}$ y $r \in G$. De la hipótesis deducimos que $u_{r^{-1}}(\alpha_t(a), f(r))A_{r^{-1}} \subset \alpha_{r^{-1}}(A_t A_{r^{-1}}) \subset A_{r^{-1}t}A_{r^{-1}}$ y también que $u_{r^{-1}t}(a, f(r))A_{r^{-1}t} \subset \alpha_{r^{-1}t}(A_{t^{-1}}A_{t^{-1}r}) \subset A_{r^{-1}}A_{r^{-1}t}$. Luego tanto $u_{r^{-1}}(\alpha_t(a), f(r))$ como $u_{r^{-1}t}(a, f(r))$ pertenecen a $A_{r^{-1}}A_{r^{-1}t}$. Si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de ese ideal entonces

$$\begin{aligned}
u_{r^{-1}}(\alpha_t(a), f(r)) &= \lim_i u_{r^{-1}}(\alpha_t(a), f(r))e_i = \lim_i \alpha_{r^{-1}}(\alpha_t(a)\alpha_r(f(r)e_i)) \\
&= \lim_i \alpha_{r^{-1}}(\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}r}(f(r)e_i))) = \lim_i \alpha_{r^{-1}t}(a\alpha_{t^{-1}r}(f(r)e_i)) \\
&= \lim_i u_{r^{-1}t}(a, f(r))e_i = u_{r^{-1}t}(a, f(r)).
\end{aligned}$$

Para continuar nuestra construcción de la globalización de α llamemos B a $\overline{[\beta\iota(a)]} = \overline{\operatorname{span}}\,\{\beta_t(\iota(A))\colon t \in G\}$. Claramente B es una C*-álgebra $\beta-$invariante, por lo que $\theta := \beta|_B$ es una acción global en C*-álgebras. Para mostrar que $(\theta, \iota, B, \iota(A))$ es una globalización (minimal) de α basta con mostrar que (i) $\iota(A)$ es un ideal de B y (ii) $\iota(A) \cap \theta_t(\iota(A)) = \iota(A_t)$ para todo $t \in G$.

La definición de B junto con la condición (ii) implican que $\iota(A)B = \overline{\operatorname{span}}\,\{\iota(A)\theta_t(A)\colon t \in G\} \subset \iota(A)$ y $B\iota(A) = (\iota(A)B)^* \subset \iota(A)$. Por lo tanto basta con mostrar (ii). Además $\iota(A_t) = \iota(\alpha_t(A_{t^{-1}})) = \theta_t(\iota(A_{t^{-1}})) \subset \theta_t(\iota(A))$, con lo cual deducimos que $\iota(A_t) \subset \iota(A) \cap \theta_t(\iota(A))$. Nos resta mostrar que si $\iota(a) \in \iota(A)\theta_t(\iota(A))$ entonces $a \in A_t$. En caso que $\iota(a) \in \iota(A)\theta_t(\iota(A))$ existe $b \in A$ de manera que para toda $f \in \mathcal{X}$ y $r \in G$ se tiene que

$$u_{r^{-1}}(a, f(r)) = \iota(a)f(r) = \theta_t(\iota(b))f(r) = u_{r^{-1}t}(b, f(r)).$$

En particular, como $\{f(e)\colon f \in \mathcal{X}\} = A$, $u_e(a,c) = u_t(b,c)$, para todo $c \in A$. De la hipótesis se desprende inmediatamente que $ac = u_e(a,c)$, por lo que $aA = u_t(b, A) \in A_t$. Tomando una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de A deducimos que $a = \lim_i u_t(b, e_i) \in A_t$.

Para terminar nos resta mostrar que θ es continua. Como es global basta mostrar que para cada $b \in B$ la función $t \mapsto \theta_t(b)$ es continua. Pero, como $[\theta\iota(a)]$ es denso en B y cada θ_r es una isometría, basta mostrar que para cada $a \in A$ la función $t \mapsto \theta_t(\iota(a))$ es continua en e.

Consideremos, tan sólo en este párrafo, a G con la topología discreta. En este caso $(\theta, \iota, B, \iota(A))$ es una globalización (minimal) de α y el Lema 3.1 implica que para cada $a \in A$

$$\begin{aligned}
\|\theta_t(\iota(a)) - \iota(a)\| &= \sup\{\|\theta_t(a)f(r) - \iota(a)f(r)\| \colon f \in \mathcal{X},\ \|f\| \leq 1\ r \in G\}\\
&= \sup\{\|u_{r^{-1}t}(a, f(r)) - u_{r^{-1}}(a, f(r))\| \colon f \in \mathcal{X},\ \|f\| \leq 1,\ r \in G\}\\
&= \sup\{\|u_{rt}(a, b) - u_r(a, b)\| \colon b \in A,\ \|b\| \leq 1,\ r \in G\}.
\end{aligned}$$

Como la topología de G es irrelevante en la igualdad anterior, la igualdad es válida en general.

Utilizaremos la igualdad anterior para mostrar que $\lim_{t\to e} \|\theta_t(\iota(a)) - \iota(a)\| = 0$. Fijemos $r \in G$ y $b \in A$, con $\|b\| \leq 1$. Sabemos que $u_{rt}(a, b) - u_r(a, b) \in A_{rt} + A_r$, por lo que si $\{e_i\}_{i\in I}$ es una unidad aproximada de $A_{rt} + A_r$ entonces $\|u_{rt}(a, b) - u_r(a, b)\| = \lim_i \|(u_{rt}(a, b) - u_r(a, b))e_i\|$.

Fijemos ahora $i \in I$. Puesto que $e_i \in (A_{rt} + A_r)^+$ existen [Ped79, Proposición 1.5.9] $c \in A_{rt}^+$ y $d \in A_r^+$ tales que $e_i = c + d$, en particular $\|d\|, \|c\| \leq \|e_i\| \leq 1$.

Por un lado, si $\{u_j\}_{j\in J}$ es una unidad aproximada de A_t entonces

$$\begin{aligned}
\|(u_{rt}(a, b) - u_r(a, b))c\| = \|u_{rt}(a, b)c - u_r(a, b)c\| &= \|\theta_{rt}(a\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc)) - \theta_r(a)bc\|\\
&= \|\theta_{rt}(a\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc)) - \theta_{rt}(\theta_{t^{-1}}(a)\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc))\|\\
&= \lim_j \|a\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc) - \theta_{t^{-1}}(u_j)\theta_{t^{-1}}(a)\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc)\|\\
&= \lim_j \|a\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc) - \theta_{t^{-1}}(u_j)\theta_{t^{-1}}(a)\theta_{t^{-1}r^{-1}}(bc)\|\\
&\leq \limsup_j \|a - \theta_{t^{-1}}(u_j a)\| = \limsup_j \|a - \alpha_{t^{-1}}(u_j a)\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando lo anterior, deducimos que para toda unidad aproximada $\{v_k\}_{k\in K}$ de $A_{t^{-1}}$ se cumple que $\|(u_{rt}(a, b) - u_r(a, b))d\| \leq \limsup_k \|a - \alpha_t(v_k a)\|$. De esto deducimos que

$$\|u_{rt}(a, b) - u_r(a, b)\| \leq \limsup_j \|a - \alpha_{t^{-1}}(u_j a)\| + \limsup_k \|a - \alpha_t(v_k a)\|.$$

Para acotar $\|\theta_t(\iota(a)) - \iota(a)\|$ tomemos una unidad aproximada $\{e_l\}_{l\in L}$ de $C_0^\alpha(G,A)$ contenida en $C_c^\alpha(G,A)$. Esto implica que, para cada $t\in G$, $\{e_l(t)\}_{l\in L}$ es una unidad aproximada de A_t. De los cálculos anteriores deducimos que

$$0 \le \limsup_{t\to e} \|\theta_t(\iota(a)) - \iota(a)\| \le \limsup_{t\to e}\ \limsup_{l} \|a - \alpha_{t^{-1}}(e_l(t)a)\| + \|a - \alpha_t(e_l(t^{-1})a)\|.$$

Dado que la función $G\to G$ dada por $t\mapsto t^{-1}$ es continua, para concluir la prueba nos basta con mostrar que $0 = \lim_{t\to e}\ \limsup_l \|a-\alpha_t(e_l(t^{-1})a)\|$. Tomemos $\varepsilon>0$. Como $\Gamma_\alpha\to A$, $(t,b)\mapsto \alpha_t(b)$, es continua, existen un entorno U de e y un $\delta>0$ de manera que si $(t,b)\in (U\times B(a,\delta))\cap\Gamma_\alpha$ entonces $\|\alpha_t(b)-a\|<\varepsilon/2$. Debido a que la familia $\{A_t\}_{t\in G}$ es continua, el conjunto $V := \{t\in G\colon A_t\cap B(a,\delta)\neq\emptyset\}^{-1}$ es un entorno de e. Probemos que si $t\in V\cap U$ entonces $\limsup_l \|a-\alpha_t(e_l(t^{-1})a)\|<\varepsilon$. Para cada $t\in V\cap U$ se tiene que la distancia de a a $A_{t^{-1}}$ es menor a δ. Luego [Ped79, Lema 1.5.4] existe $l_t\in L$ de manera que $\|a-e_l(t^{-1})a\|<\delta$, para todo $l\ge l_t$. Dado $l_1\ge l_t$, para todo $l\ge l_1$ se cumple que $(t,e_l(t^{-1})a)\in (U\times B(a,\delta))\cap\Gamma_\alpha$ y por lo tanto $\|a-\alpha_t(e_l(t^{-1})a)\|<\varepsilon/2$. Con esto mostramos que $\sup_{l\ge l_1}\|a-\alpha_t(e_l(t^{-1})a)\|\le\varepsilon/2$ $(\forall\ l_1\ge l_t)$ y por lo tanto $\limsup_l\|a-\alpha_t(e_l(t^{-1})a)\|<\varepsilon$, para todo $t\in U\cap V$. □

Observación 3.3. La globalización construida en el Teorema anterior es minimal y por lo tanto envolvente.

Para que exista una globalización los elementos $u_t(\cdot,\cdot)$ deben estar definidos en "suficientes" elementos de $A\times A$, como lo establece el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Dada una acción parcial en C*-álgebras, α de G en A, la condición (b) del teorema anterior es equivalente a que existan conjuntos $D,E\subset A$ de manera que (i) $\overline{\operatorname{span}}\,D=\overline{\operatorname{span}}\,E=A$ y (ii) para todo $(t,a,b)\in G\times D\times E$ existe $u_t(a,b)\in A_t$ tal que $u_t(a,b)c=\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(bc))$, para todo $c\in A_t$. Además la función $A\times A\to A_t$, $(a,b)\mapsto u_t(a,b)$, es lineal en ambas variables y $\|u_t(a,b)\|\le\|a\|\|b\|$, para todo $(t,a,b)\in G\times A\times A$.*

Demostración. La condición (b) del Teorema anterior implica (i) y (ii) para $A=D=E$. Para mostrar el recíproco fijemos $a\in D$. Para todo $t\in G$, $b,c\in E$, $\lambda\in\mathbb{C}$ y $d\in A_t$ se tiene que $(u_t(a,b)+\lambda u_t(a,c))d=\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}((b+\lambda c)d))$. O sea que $u_t(a,b)+\lambda u_t(a,c)$ es el único elemento $z\in A_t$ tal que $zc=\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}((b+\lambda c)d))$, para todo $c\in A_t$. Luego podemos asumir que $u_.(\cdot,\cdot)$ está definida para todo $(t,a,b)\in G\times D\times\operatorname{span}E$. Con un argumento análogo probamos que $u_t(a,b)$ está definida para todo $(t,a,b)\in G\times(\operatorname{span}D)\times(\operatorname{span}E)$; y que cada u_t es lineal en ambas variables.

Por otro lado, dado $(t,a,b)\in G\times(\operatorname{span}D)\times(\operatorname{span}E)$, si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de A_t entonces $\|u_t(a,b)\|=\lim_i\|\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(be_i))\|=\lim_i\|a\alpha_{t^{-1}}(be_i)\|\le\|a\|\|b\|$. Luego, fijados t y a, la función $\operatorname{span}E\to A_t$, $b\mapsto u_t(a,b)$, es lineal y acotada.

Continuemos con $(t,a) \in G \times \operatorname{span} D$ fijo. Dado $b \in A$ tomemos una sucesión $\{b_n\}_n \subset \operatorname{span} E$ tal que $b_n \to b$. Luego $\{u_t(a,b_n)\}_n \subset A_t$ es de Cauchy y por lo tanto convergente en A_t, llamemos x a su límite. Para todo $c \in A_t$ se cumple que

$$xc = \lim_n u_t(a,b_n)c = \lim_n \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(b_n c)) = \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(bc));$$

lo que implica que $x = u_t(a,b)$. Con esto mostramos que $u_t(a,b)$ está definida para todo $(t,a,b) \in G \times (\operatorname{span} D) \times A$. Con un argumento análogo mostramos que está definida en $G \times A \times A$.

El resto de la tesis se deduce de que lo que acabamos de mostrar implica (i) del Teorema anterior y por lo tanto implica (a) y (b) para $D = E = A$. $\square$

Corolario 3.5. *Sea α una acción parcial en C*-álgebras de G en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *α tiene una globalización.*
2. *Existen subconjuntos $D, E \subset A$ tales que (i) $A = \overline{\operatorname{span}}\, D = \overline{\operatorname{span}}\, E$ y (ii) para todo $(t,a,b) \in G \times D \times E$ existe $u_t(a,b) \in A_t$ tal que $u_t(a,b)c = \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(bc))$, para todo $c \in A_t$.*

El siguiente resultado admite una demostración directa aunque algo más extensa que la que exponemos aquí, en la que utilizamos lo que acabamos de mostrar.

Corolario 3.6. *Dada una acción parcial HLC, σ de G en X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *σ tiene una globalización.*

(b) *El gráfico de σ es cerrado en $G \times X \times X$.*

(c) *Para cada $t \in G$ el gráfico de $\sigma_t \colon X_{t^{-1}} \to X_t$, $\operatorname{Gr}(\sigma_t) := \{(x,y) \in X \times X \colon x \in X_{t^{-1}},\ y = \sigma_t(x)\}$, es cerrado en $X \times X$.*

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) está dada por el Teorema 1.78. Veamos ahora que (b) es equivalente a (c). Sabemos que (b) es equivalente a que la acción parcial en C*-álgebras definida por σ en $C_0(X)$, $\theta(\sigma)$, tenga una globalización. El Corolario anterior (o el Teorema precedente) nos dicen que la topología de G es irrelevante al momento de determinar si $\theta(\sigma)$ tiene una globalización; y por lo tanto podemos considerar la topología discreta. En otras palabras: en (b) es indiferente considerar la topología original de G o la discreta. Además, las condiciones (b) y (c) son equivalentes cuando G es discreto, lo que nos dice que (b) es equivalente a (c) en el caso general. $\square$

3.2. Módulos de Hilbert

Tomemos una acción parcial en módulos de Hilbert, γ de G en $\mathcal{X}_A$. La idea, para encontrar una condición necesaria y suficiente para la existencia de una globalización de γ, es usar los resultados expuestos en la sección anterior y el Corolario 1.90, que establecía que γ tiene una globalización si y solamente si $\mathbb{L}(\gamma)$ tiene una.

Teorema 3.7. *Dada una acción parcial en módulos de Hilbert, γ de G en $\mathcal{X}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) γ tiene una globalización;

(b) $\mathbb{L}(\gamma)$ tiene una globalización;

(c) γ^l y γ^r tienen una globalización;

(d) Para todo $(t,x,a) \in G\times\mathcal{X}\times A$ y $(s,y,z)\in G\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ existen (únicos) elementos $u_t(x,a) \in \mathcal{X}_t$ y $v_s(y,z) \in A_s$ tales que $u_t(x,a)b = \gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(ab))$ y $v_s(y,z)c = \langle y, \gamma_s(z\alpha_{s^{-1}}(c))\rangle$, para todo $b\in A_t$ y $c \in A_s$.

Demostración. El Corolario 1.90 establece la equivalencia entre (a) y (b) y el Corolario 1.82 nos dice que (a) implica (c).

Probemos que (c) implica (d). Denotemos $u^l_t(a,b)$ y $u^r_t(a,b)$, a los elementos $u_t(a,b)$ (del Teorema 3.2) de γ^l y γ^r, respectivamente. Fijemos $(t,x,a)\in G\times\mathcal{X}\times A$. Como $\mathcal{X} = \mathcal{X}A$ existen $x'\in\mathcal{X}$ y $b \in A$ tales que $x = x'b$. Para todo $c\in A_t$ se cumple que

$$\begin{aligned}\gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(ac)) &= \gamma_t(x'b\alpha_{t^{-1}}(ac)) = \gamma_t(x'\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(b\alpha_{t^{-1}}(ac)))) = \gamma_t(x'\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(b\alpha_{t^{-1}}(ac))))\\ &= \gamma_t(x'\alpha_{t^{-1}}(u^r_t(b,a)c)) = \gamma_t(x'\alpha_{t^{-1}}(u^r_t(b,a)))c.\end{aligned}$$

Luego definimos $u_t(x'b,a) := \gamma_t(x'\alpha_{t^{-1}}(u^r_t(b,a)))$. Las igualdades de arriba implican que la definición no depende de la factorización $x = x'b$.

Tomemos ahora $(t,y,z)\in G\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} = \mathbb{K}(\mathcal{X})\mathcal{X}$ existen $S,T\in\mathbb{K}(\mathcal{X})$ e $y',z'\in\mathcal{X}$ tales que $y = Sy'$ y $z = Tz'$. Para toda unidad aproximada $\{R_i\}_i$ de $\mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$ y todo $c \in A_t$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\langle y, \gamma_t(z\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle &= \langle Sy', \gamma_t(Tz'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle = \langle y', S^*\gamma_t(Tz'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle \\
&= \lim_i \langle y', R_i S^*\gamma_t(Tz'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle \\
&= \lim_i \lim_j \langle y', \gamma_t(\gamma^l_{t^{-1}}(R_i S^*)TR_j z'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle \\
&= \lim_i \lim_j \langle y', \gamma^l_t(\gamma^l_{t^{-1}}(R_i S^*)TR_j)\gamma_t(z'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle \\
&= \lim_i \langle y', \gamma^l_t(T^*\gamma^l_{t^{-1}}(SR_i))^*\gamma_t(z'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle \\
&= \langle y', u^l_t(T^*, S)^*\gamma_t(z'\alpha_{t^{-1}}(c))\rangle = \langle y', \gamma_t(\gamma^l_{t^{-1}}(u^l_t(T^*, S)^*)z')\rangle c.
\end{aligned}$$

Entonces basta con definir $v_t(Sy', Ty') := \langle y', \gamma_t(\gamma^l_{t^{-1}}(u^l_t(T^*, S)^*)z')\rangle$.

El último paso es mostrar que (d) implica (b), para lo que usaremos el Corolario 3.5. Sea

$$D = E := \left\{ \begin{pmatrix} |u\rangle\langle v| & w \\ \widetilde{x} & \langle y, z\rangle \end{pmatrix} : u, v, w, x, y, z \in \mathcal{X} \right\}.$$

Claramente $\overline{\operatorname{span}}\, D = \overline{\operatorname{span}}\, E = \mathbb{L}(\mathcal{X})$.

Tomemos $M_1, M_2 \in D$ y $M_3 \in \mathbb{L}(\mathcal{X})$ y calculemos $\mathbb{L}(\gamma_t)(M_1\mathbb{L}(\gamma_{t^{-1}})(M_2M_3))$. Si

$$M_i = \begin{pmatrix} S_i & w_i \\ \widetilde{x}_i & a_i \end{pmatrix},\ i = 1, 2, 3,$$

entonces $\mathbb{L}(\gamma_t)(M_1\mathbb{L}(\gamma_{t^{-1}})(M_2M_3))$ es

$$\Xi := \mathbb{L}(\gamma_t)\left(\begin{pmatrix} S_1 & w_1 \\ \widetilde{x_1} & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^l_{t^{-1}}(S_2S_3 + |w_2\rangle\langle x_3|) & \gamma_{t^{-1}}(S_2w_3 + w_2a_3) \\ \gamma_{t^{-1}}(S_3^*x_2 + x_3a_2^*)^\sim & \gamma^r_{t^{-1}}(\langle x_2, w_3\rangle + a_2a_3) \end{pmatrix}\right). \tag{3.2.1}$$

Analizaremos por separado las cuatro entradas de Ξ. Asumamos que $S_i = |u_i\rangle\langle v_i|$ y $a_i = \langle y_i, z_i\rangle$ $(i = 1, 2)$. Además $S_3 \in \mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$, $a_3 \in A_t$ y $w_1, x_1 \in \mathcal{X}_t$. En lo que sigue utilizaremos [RW98, Proposición 2.31] que establece que para todo $\xi \in \mathcal{X}$ existe $\xi' \in \mathcal{X}$ tal que $\xi = \xi'\langle\xi', \xi'\rangle$. Cuando escribimos a^ξ (T^ξ) queremos decir $\langle\xi', \xi'\rangle$ $(|\xi'\rangle\langle\xi'\rangle)$; de forma que $\xi = T^\xi\xi' = \xi' a^\xi$.

La entrada (1,1) de Ξ, $\Xi_{1,1}$, es $\gamma^l_t(S_1\gamma^l_{t^{-1}}(S_2S_3+|w_2\rangle\langle x_3|))+\gamma^l_t(|w_1\rangle\langle\gamma_{t^{-1}}(S_3^*x_2+x_3a_2^*)|)\in \mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$. Por un lado, para todo $\eta\in\mathcal{X}_t$ se cumple

$$\begin{aligned}
&\gamma^l_t(S_1\gamma^l_{t^{-1}}(S_2S_3+|w_2\rangle\langle x_3|))(\eta)\\
&\quad=\gamma_t(S_1\gamma_{t^{-1}}(S_2S_3(\eta)+w_2\langle x_3,\eta\rangle))\\
&\quad=\gamma_t(u_1\langle v_1,\gamma_{t^{-1}}(u_2\langle v_2,S_3\eta\rangle+w_2\langle x_3,\eta\rangle)\rangle)\\
&\quad=\gamma_t(u_1\langle v_1,\gamma_{t^{-1}}(u_2\langle v_2,S_3\eta\rangle)\rangle)+\gamma_t(u_1\langle v_1,\gamma_{t^{-1}}(w_2\langle x_3,\eta\rangle)\rangle)\\
&\quad=\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,u_2)\gamma^r_{t^{-1}}(\langle v_2,S_3\eta\rangle))+\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,w_2)\gamma^r_{t^{-1}}(\langle x_3,\eta\rangle))\\
&\quad=\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,u_2))\langle v_2,S_3\eta\rangle+\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,w_2))\langle x_3,\eta\rangle\\
&\quad=|\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,u_2))\rangle\langle v_2|S_3(\eta)+|\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,w_2))\rangle\langle x_3|(\eta).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\gamma^l_t(|w_1\rangle\langle\gamma_{t^{-1}}(S_3^*x_2+x_3a_2^*)|)(\eta)&=\gamma_t(w_1\langle\gamma_{t^{-1}}(S_3^*x_2+x_3a_2^*),\gamma_{t^{-1}}(\eta)\rangle)\\
&=\gamma_t(w_1\langle\gamma_{t^{-1}}(S_3^*x_2'a^{x_2}+x_3a_2^*),\gamma_{t^{-1}}(\eta)\rangle)\\
&=\gamma_t(w_1\gamma^r_{t^{-1}}(\langle S_3^*x_2'a^{x_2}+x_3a_2^*,\eta\rangle))\\
&=\gamma_t(w_1\gamma^r_{t^{-1}}(a^{x_2}\langle S_3^*x_2',\eta\rangle))+\gamma_t(w_1\gamma^r_{t^{-1}}(a_2\langle x_3,\eta\rangle))\\
&=u_t(w_1,a^{x_2})\langle S_3^*x_2',\eta\rangle+u_t(w_1,a_2)\langle x_3,\eta\rangle\\
&=|u_t(w_1,a^{x_2})\rangle\langle x_2'|S_3(\eta)+|u_t(w_1,a_2)\rangle\langle x_3|(\eta)
\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores nos dicen que las entradas (1,1) y (1,2) de $u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1,M_2)$ deberían definirse como

$$\begin{aligned}
u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1,M_2)_{1,1}&:=|\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,u_2))\rangle\langle v_2|+|u_t(w_1,a^{x_2})\rangle\langle x_2'|\\
u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1,M_2)_{1,2}&:=\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1,w_2))+u_t(w_1,a_2).
\end{aligned}$$

Ahora analizaremos la entrada (2,2) de Ξ. Esa entrada es

$$\Xi_{2,2}=\gamma^r_t\left(\langle x_1,\gamma_{t^{-1}}(S_2w_3+w_2a_3)\rangle+a_1\gamma^r_{t^{-1}}(\langle x_2,w_3\rangle+a_2a_3)\right)\in A_t,$$

por lo tanto (para la unidad aproximada de antes):

$$
\begin{aligned}
\Xi_{2,2} &= \gamma_t^r\left(\langle x_1, \gamma_{t^{-1}}(u_2\langle v_2, w_3\rangle + w_2a_3)\rangle + a_1\gamma_{t^{-1}}^r(\langle x_2, w_3\rangle + \langle y_2, z_2\rangle a_3)\right)\\
&= \lim_i \langle \gamma_t(x_1e_i), u_2\langle v_2, w_3\rangle + w_2a_3\rangle + \gamma_t^r(e_ia_1)(\langle x_2, w_3\rangle + \langle y_2, z_2\rangle a_3)\\
&= \lim_i \langle v_2\langle u_2, \gamma_t(x_1e_i)\rangle + x_2\gamma_t(a_1^*e_i), w_3\rangle\\
&\qquad\qquad + \lim_i \left[\langle \gamma_t(x_1e_i), w_2\rangle + \langle y_2\gamma_t^r(a_1^*e_i), z_2\rangle\right] a_3\\
&= \lim_i \langle v_2v_t(u_2, x_1)\gamma_t^r(e_i) + \gamma_t(\gamma_{t^{-1}}(x_2\gamma_t^r(a_1^*e_i))), w_3\rangle\\
&\qquad\qquad + \lim_i \left[\langle w_2, \gamma_t(x_1e_i)\rangle^* + \langle \gamma_t(\gamma_{t^{-1}}(y_2\gamma_t^r(a_1^*e_i))), z_2\rangle\right] a_3\\
&= \langle v_2v_t(u_2, x_1) + \gamma_t(u_{t^{-1}}(x_2, a_1^*)), w_3\rangle\\
&\qquad\qquad + \left[v_t(w_2, x_1)^* + \langle \gamma_t(u_{t^{-1}}(y_2, a_1^*)), z_2\rangle\right] a_3.
\end{aligned}
$$

Las igualdades anteriores nos sugieren que las entradas de $u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)$ deberían ser

$$
\begin{aligned}
u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{1,1} &:= |\gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1, u_2))\rangle\langle v_2| + |u_t(w_1, a^{x_2})\rangle\langle x_2'|\\
u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{1,2} &:= \gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1, w_2)) + u_t(w_1, a_2)\\
u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{2,1} &:= [v_2v_t(u_2, x_1) + \gamma_t(u_{t^{-1}}(x_2, a_1^*))]^{\sim}\\
u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{2,2} &:= v_t(w_2, x_1)^* + \langle \gamma_t(u_{t^{-1}}(y_2, a_1^*)), z_2\rangle.
\end{aligned}
$$

De acuerdo a las cálculos anteriores sabemos que los coeficientes (1,1) y (2,2) de Ξ y $u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)M_2$ coinciden. La prueba habrá terminado una vez que mostremos que también coinciden los coeficientes (2,1) y (1,2). El último de ellos es

$$
\begin{aligned}
\Xi_{1,2} &= \gamma_t(S_1\gamma_{t^{-1}}(S_2w_3 + w_2a_3) + w_1\gamma_{t^{-1}}^r(\langle x_2, w_3\rangle + a_2a_3))\\
&= \gamma_t(u_1\langle v_1, \gamma_{t^{-1}}(u_2\langle v_2, w_3\rangle)\rangle) + \gamma_t(u_1\langle v_1, \gamma_{t^{-1}}(w_2a_3)\rangle)\\
&\qquad + \gamma_t(w_1\gamma_{t^{-1}}^r(a^{x_2}\langle x_2', w_3\rangle)) + \gamma_t(w_1\gamma_{t^{-1}}^r(a_2a_3))\\
&= \gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1, u_2)\gamma_{t^{-1}}^r(\langle v_2, w_3\rangle)) + \gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1, w_2)\gamma_{t^{-1}}^r(a_3)\rangle)\\
&\qquad + \gamma_t(u_{t^{-1}}(w_1, a^{x_2})\gamma_{t^{-1}}^r(\langle x_2', w_3\rangle)) + \gamma_t(u_{t^{-1}}(w_1, a_2)\gamma_{t^{-1}}^r(a_3))\\
&= \gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1, u_2))\langle v_2, w_3\rangle + \gamma_t(u_1v_{t^{-1}}(v_1, w_2))a_3\\
&\qquad + \gamma_t(u_{t^{-1}}(w_1, a^{x_2}))\langle x_2', w_3\rangle + \gamma_t(u_{t^{-1}}(w_1, a_2))a_3\\
&= u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{1,1}w_3 + u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{1,2}a_3.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para calcular el coeficiente (2,1) de Ξ tomamos una unidad aproximada de $A_{t^{-1}}$, $\{e_i\}_i$. Luego

$$\begin{aligned}
\Xi_{2,1} &= \gamma_t[\gamma^l_{t^{-1}}(S_3^*S_2^* + |x_3\rangle\langle w_2|)x_1 + \gamma_{t^{-1}}(S_3^*x_2 + x_3a_2^*)a_1^*]^\sim \\
&= \lim_i[(S_3^*S_2^* + |x_3\rangle\langle w_2|)\gamma_t(x_1e_i) + (S_3^*x_2 + x_3a_2^*)\gamma^r_t(a_1^*e_i)]^\sim \\
&= \lim_i[S_3^*(S_2^*\gamma_t(x_1e_i) + x_2\gamma^r_t(a_1^*e_i)) + x_3(\langle w_2, \gamma_t(x_1e_i)\rangle + a_2^*\gamma^r_t(a_1^*e_i))]^\sim \\
&= \lim_i[S_2^*\gamma_t(x_1e_i) + x_2\gamma^r_t(a_1^*e_i)]^\sim S_3 + (\langle\gamma_t(x_1e_i), w_2\rangle + \gamma^r_t(e_ia_1)a_2)\widetilde{x_3} \\
&= \lim_i[v_2\langle u_2, \gamma_t(x_1e_i)\rangle + x_2\gamma^r_t(a_1^*e_i)]^\sim S_3 + \lim_i(\langle\gamma_t(x_1e_i), w_2\rangle + \gamma^r_t(e_ia_1)a_2)\widetilde{x_3} \\
&= \lim_i[v_2v_t(u_2, x_1)\alpha_t(e_i) + \gamma_t(u_{t^{-1}}(x_2, a_1^*))e_i]^\sim S_3 \\
&\qquad + \lim_i(\langle w_2, \gamma_t(x_1e_i)\rangle^* + \langle y_2\gamma^r_t(a_1^*e_i), z_2\rangle)\widetilde{x_3} \\
&= [v_2v_t(u_2, x_1) + \gamma_t(u_{t^{-1}}(x_2, a_1^*))]^\sim S_3 \\
&\qquad + \lim_i((v_t(w_2, x_1)\alpha_t(e_i))^* + \langle\gamma_t(\gamma_{t^{-1}}(y_2\gamma^r_t(a_1^*e_i))), z_2\rangle)\widetilde{x_3} \\
&= u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{2,1}S_3 + (v_t(w_2, x_1)^* + \lim_i\langle\gamma_t(u_{t^{-1}}(y_2, a_1)\alpha_t(e_i)), z_2\rangle)\widetilde{x_3} \\
&= u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{2,1}S_3 + u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)_{2,2}\widetilde{x_3}.
\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $\mathbb{L}(\gamma)_t(M_1\mathbb{L}(\gamma)_{t^{-1}}(M_2M_3)) = \Xi = u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2)M_3$ y, por construcción, $u^{\mathbb{L}(\gamma)}(M_1, M_2) \in \mathbb{L}(\mathcal{X}_t)$. El Corolario 3.5 implica que $\mathbb{L}(\gamma)$ tiene una globalización. $\square$

En principio podría preguntarse si dada una acción parcial en módulos de Hilbert, γ, es verdad que γ tiene una globalización siempre que γ^r (o γ^l) la tiene. Eso es falso y hay muchos ejemplos de este tipo.

Ejemplo 3.1. Tomemos una C*-acción parcial, α, que no admita una globalización. Como ejemplo concreto podemos pensar en $G = \mathbb{Z}_2$, $A = C_0([0,1])$, $\alpha_0 = \mathrm{id}_A$ y $\alpha_1 = \mathrm{id}_{[0,1/2)}$. Tomemos ahora una Morita envolvente[1] de α, (β, ι, B, I). Por definición existe una acción parcial en Módulos de Hilbert, γ, de forma que $\gamma^l = \beta|_I$ y $\gamma^r = \alpha$. Luego γ^l tiene una globalización pero γ^r no la tiene.

El siguiente resultado es equivalente a la Proposición 6.3 de [Aba03], en la cual se muestra la unicidad (a menos de equivalencia de Morita) de la acción Morita envolvente de una acción parcial. Ofrecemos aquí una prueba en términos de los resultados anteriores.

Corolario 3.8. *Supongamos que (θ, ι, A, I) es una Morita envolvente de α y (η, κ, B, J) una de β y que α es Morita equivalente a β. Luego θ es Morita equivalente a η.*

[1] Ver la Definición 2.12 y los comentarios anteriores a la misma.

Demostración. Sabemos que $\theta|_I$ es Morita equivalente a α, α lo es a β y β a $\eta|_J$. Como la equivalencia de Morita es transitiva [Aba03] $\theta|_I$ es Morita equivalente a $\eta|_J$; digamos a través de una acción parcial en módulos de Hilbert γ.

Como $\gamma^l = \theta|_I$ y $\gamma^r = \eta|_J$ tienen globalizaciones, γ tiene una globalización minimal $(\delta, \pi, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$. Luego $(\delta^l, \pi^l, \mathbb{K}(\mathcal{Z}), \mathbb{K}(\mathcal{Y}))$ es una globalización minimal de γ^l y por lo tanto δ^l es isomorfa a θ. Análogamente se deduce que δ^r es isomorfa a η y, por lo tanto, η es Morita equivalente a θ. $\square$

3.3. Homomorfismos y globalizaciones

En los capítulos siguientes trabajaremos con ciertos homomorfismos de una acción parcial que tiene una globalización en otra acción parcial. Estamos interesados en obtener condiciones sobre el homomorfismo que aseguren que la segunda acción tiene una globalización. Comenzamos por estudiar las acciones parciales en C*-álgebras conmutativas, o sus equivalentes topológicos.

Teorema 3.9. *Supongamos que σ y τ son acciones parciales HLC de G en X e Y, respectivamente, y que $f\colon X \to Y$ es un morfismo de acciones parciales tal que para todo $t \in G$ se cumple que $f^{-1}(Y_t) = X_t$. Luego σ tiene una globalización siempre que τ tiene una globalización.*

Demostración. Tomemos una red $\{(t_i, x_i, y_i)\}_i \subset \mathrm{Gr}(\sigma)$ que converge a $(t, x, y) \in G\times X\times Y$. Luego $(t_i, f(x_i), f(y_i)) \to (t, f(x), f(y))$ y $\{(t_i, f(x_i), f(y_i))\}_i$ es una red contenida en el gráfico de τ. Por lo tanto $(t, f(x), f(y)) \in \mathrm{Gr}(\tau)$ y $f(x) \in Y_{t^{-1}}$. Luego $x \in f^{-1}(Y_{t^{-1}}) = X_{t^{-1}}$ y la continuidad de σ asegura que $\lim_i y_i = \lim_i \sigma_{t_i}(x_i) = \sigma_t(x)$. En otras palabras $(t, x, y) \in \mathrm{Gr}(\sigma)$. $\square$

Ya que tenemos una caracterización de las acciones parciales en C*-álgebras que admiten una globalización, queremos traducir el teorema anterior a las acciones parciales en C*-álgebras.

En la situación anterior f define un $*-$homomorfismo $\phi\colon C_0(Y) \to C_b(X),\ \phi(a) = a\circ f$, y puede mostrarse directamente que es equivariante respecto de $\alpha := \Theta(\sigma)$ y $\beta := \Theta(\tau)$ (en el sentido de la Definición 1.59).

Para lograr una traducción completa al lenguaje de las C*-álgebras probamos que las siguientes condiciones son equivalentes

(a) Para todo $t \in G$ se cumple que $f^{-1}(Y_t) = X_t$.

(b) Para todo $t \in G$ se cumple que $\phi(C_0(Y_t))C_0(X) = C_0(X_t)$.

Asumamos que se cumple (a) y tomemos $a \in C_0(X)$ y $b \in C_0(Y_t)$. Si $x \notin X_t$ entonces $f(x) \notin Y_t$ ya que en caso contrario $f(x) \in Y_t$ y $x \in X_t$. Luego $\phi(b)a(x) = b(f(x))a(x) = 0$. Hemos mostrado que $\phi(C_0(Y_t))C_0(X) \subset C_0(X_t)$. Por otra parte, como $C_b(X)$ es conmutativa, el Teorema de Cohen-Hewitt implica que $\phi(C_0(Y_t))C_0(X)$ es un ideal de $C_0(X)$. Lo que vimos antes implica que existe un abierto $U \subset X_t$ tal que $\phi(C_0(Y_t))C_0(X) = C_0(U)$. Tomemos un punto arbitrario $x \in X_t$. Luego existe $a \in C_0(X)$ tal que $a(x) = 1$. Además, como $f(x) \in Y_t$, existe $b \in C_0(Y_t)$ tal que $b(f(x)) = 1$. Es evidente entonces que $\phi(b)a(x) = b(f(x))a(x) = 1$. Lo anterior implica que $C_0(U) = C_0(X_t)$, esto completa la prueba de que (a) implica (b).

Recíprocamente, tomemos $t \in G$ y mostremos que $f^{-1}(Y_t) \subset X_t$. Si $f(x) \in Y_t$ entonces existen $a \in C_0(X)$ y $b \in C_0(Y_t)$ tales que $a(x) = b(f(x)) = 1$. Luego $\phi(b)a(x) = 1$ y $\phi(b)a \in C_0(X_t)$, lo que implica que $x \in X_t$. Asumamos ahora que $x \in X_t$ y tomemos $a \in C_0(X_t)$ tal que $a(x) = 1$. La condición (b) nos dice que existen $b \in C_0(Y_t)$ y $c \in C_0(X)$ tales que $a = \phi(b)c$. Luego $b(f(x))c(x) = a(x) = 1$ y $b(f(x)) \neq 0$. Como b se anula fuera de Y_t debe ser $f(x) \in Y_t$, en otras palabras $x \in f^{-1}(Y_t)$.

Para enunciar el Teorema de arriba en el contexto de las C*-álgebras recordamos que $C_b(X)$ es canónicamente isomorfo al álgebra de multiplicadores de $C_0(X)$, $M(C_0(X))$ o $\mathbb{B}(C_0(X))$ si pensamos a $C_0(X)$ como un módulo de Hilbert. El morfismo f se sustituye por un homomorfismo equivariante $\phi\colon C_0(Y) \to C_b(X)$.

Teorema 3.10. *Supongamos que α y β son acciones parciales en C*-álgebras de G en A y B, respectivamente, y que $\phi\colon A \to M(B)$ es un homomorfismo equivariante tal que para todo $t \in G$ cumple que $\phi(A_t)B = B_t$. Luego, si α tiene una globalización entonces β también.*

Demostración. Como α tiene una globalización ella es isomorfa a una restricción de una acción global, luego podemos asumir que α es la restricción de una acción global. Específicamente: existen acción parcial en C*-álgebras, γ, de G en C y un ideal A de C tales que $\alpha = \gamma|_A$. En este caso, $u_t(a,b) = \gamma_t(a)b$, siendo $u.(\cdot,\cdot)$ la función dada en el Teorema 3.2.

Es importante observar que la hipótesis implica que $\phi(A)B = \phi(A_e)B = B_e = B$, o sea que ϕ es no degenerada. Por otro lado, también se cumple, para toda unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de A_t y todo $b \in B_t$, que $\phi(e_i)b \to b$. Estos hechos serán utilizados más adelante.

Veamos que β tiene una globalización utilizando el Teorema 3.2. Fijemos $(t,a,b) \in G \times B \times B$. Luego existen $x, y \in A$ y $c, d \in B$ tales que $a^* = \phi(x^*)c^*$ y $b = \phi(y)d$. Como

$x\gamma_{t^{-1}}(y) \in A_{t^{-1}}$ tenemos que $c\phi(x\gamma_{t^{-1}}(y)) \in (\phi(A_t)B)^* = B_t$ y tiene sentido definir $u_t(a,b) := \beta_t(c\phi(x\gamma_{t^{-1}}(y)))d$. Es evidente que $u \in B_t$. Además, si $z \in B_t$ y $\{e_i\}_i$ una unidad aproximada de A_t entonces

$$\begin{aligned}
u_t(a,b)z &= \beta_t(c\phi(x\gamma_{t^{-1}}(y)))dz = \beta_t\left(c\phi(x\gamma_{t^{-1}}(y))\beta_{t^{-1}}(dz)\right)\\
&= \beta_t\left(c\phi(\alpha_{t^{-1}}(\gamma_t(x)y))\beta_{t^{-1}}(dz)\right) = \beta_t\left(c\beta_{t^{-1}}(\phi(\gamma_t(x)y)dz)\right)\\
&= \lim_i \beta_t\left(c\beta_{t^{-1}}(\phi(e_i\gamma_t(x)y)dz)\right) = \lim_i \beta_t\left(c\beta_{t^{-1}}(\phi(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(e_i)x))\phi(y)dz)\right)\\
&= \lim_i \beta_t\left(c\phi(\alpha_{t^{-1}}(e_i))\phi(x)\beta_{t^{-1}}(\phi(y)dz)\right) = \beta_t\left(c\phi(x)\beta_{t^{-1}}(\phi(y)dz)\right)\\
&= \beta_t\left(a\beta_{t^{-1}}(bz)\right).
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $u_t(a,b)$ tiene la propiedad requerida por el Teorema 3.2. □

El enunciado del Teorema anterior tiene sentido incluso si β es una acción parcial en módulos de Hilbert.

Corolario 3.11. *Supongamos que α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A que tiene una globalización, que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$ y que $\phi\colon A \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ es un homomorfismo equivariante de manera que para todo $t \in G$ se cumple que $\phi(A_t)\mathcal{X} = \mathcal{X}_t$. Luego γ^l tiene una globalización.*

Demostración. Denotemos β a γ^l y B a $\mathbb{K}(\mathcal{X})$. Luego $M(B) = \mathbb{B}(\mathcal{X})$. Veamos que ϕ es equivariante respecto de α y β. Para probar que para todo $t \in G$, $a \in A_{t^{-1}}$ y $T \in \mathbb{K}(\mathcal{X})_{t^{-1}} = \mathbb{K}(\mathcal{X}_{t^{-1}})$ se cumple que $\phi(\alpha_t(a))\beta_t(T) = \beta_t(\phi(a)T)$. Basta probar que la igualdad se cumple para todo T de la forma $|x\rangle\langle y|$, con $x, y \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$, ya que β_t es continua y lineal y $\mathbb{K}(\mathcal{X})_{t^{-1}} = \overline{\operatorname{span}}\,|\mathcal{X}_{t^{-1}}\rangle\langle\mathcal{X}_{t^{-1}}|$.

Para todo $z \in \mathcal{X}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha_t(a))\beta_t(|x\rangle\langle y|)(z) &= \phi(\alpha_t(a))\beta_t(x)\langle\beta_t(y)|z\rangle = \beta_t(\phi(a)x)\langle\beta_t(y)|z\rangle\\
&= \beta_t(|\phi(a)x\rangle\langle y|)(z) = \beta_t(\phi(a)|x\rangle\langle y|)(z).
\end{aligned}$$

La igualdad implica que ϕ es equivariante respecto de α y β. Por otra parte, para cada $t \in G$ se cumple que

$$\phi(A_t)B = \overline{\operatorname{span}}\,|\phi(A_t)\mathcal{X}\rangle\langle\mathcal{X}| = \overline{\operatorname{span}}\,|\mathcal{X}_t\rangle\langle\mathcal{X}| = \overline{\operatorname{span}}\,|\mathcal{X}_t\rangle\langle\mathcal{X}_t| = \mathbb{K}(\mathcal{X})_t = B_t.$$

□

Con las hipótesis del Corolario anterior no es verdad que γ sea globalizable. Consideremos la situación del Ejemplo 3.1. Tomemos una acción en módulos de Hilbert, γ, de manera que γ^l tiene una globalización pero γ^r no la tiene (ver el Ejemplo mencionado antes). El homomorfismo canónico $\iota\colon \mathbb{K}(\mathcal{X}) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ es equivariante respecto de δ^l y δ y $\phi(\mathbb{K}(\mathcal{X})_t)\mathcal{X} = \mathcal{X}_t$. En este caso γ no tiene una globalización porque γ^r no la tiene.

En el caso del Teorema de arriba el homomorfismo puede extenderse a las globalizaciones de manera canónica.

Teorema 3.12. *Supongamos que α y β son acciones parciales en C*-álgebras de G en A y B y que (θ, ι, C, I) y (η, κ, D, J) son globalizaciones envolventes de α y β (respectivamente). Para cada homomorfismo equivariante $\phi\colon A \to M(B)$ con la propiedad de que para todo $t \in G$ $\phi(A_t)B = B_t$, existe un único homomorfismo equivariante $\psi\colon C \to M(D)$ tal que para todo $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que $\kappa(\phi(a)b) = \psi(\iota(a))\kappa(b)$.*

Demostración. Como $\iota\colon \alpha \to \theta|_I$ y $\kappa\colon \beta \to \eta|_J$ son isomorfismos de acciones parciales en C*-álgebras, existe un único homomorfismo equivariante (con respecto a $\theta|_I$ y $\eta|_J$) $\phi'\colon I \to M(J)$ tal que $\phi'(\iota(a)) = \kappa \circ \phi(a) \circ \kappa^{-1}$. Luego basta probar que existe un único homomorfismo equivariante $\psi\colon C \to M(D)$ tal que para todo $c \in I$ y $d \in J$ $\phi'(a)b = \psi(a)b$. En otras palabras: podemos asumir que $I = A$, $J = B$, $\alpha = \theta|_I$ y $\beta = \eta|_J$, lo que haremos de ahora en más.

Comenzaremos por mostrar la unicidad asumiendo la existencia. La función $C \to M(J)$, $c \mapsto \psi(c)|_J$, es una extensión de ϕ. Como ϕ es no degenerada ($\phi(I)J = \phi(I_e)J = J_e = J$) e I es un ideal de C, ϕ tiene una única extensión a un $*-$homomorfismo de C en $M(J)$. Llamaremos $\overline{\phi}$ a esta extensión (cuya existencia no depende de la existencia de ϕ). Luego debe cumplirse que $\psi(c)|_J = \overline{\phi}(c)$.

Asumiendo que ψ existe, para todo $a \in I$, $b \in J$ y $s, t \in G$ debe cumplirse que

$$\psi(\theta_s(a))\eta_t(b) = \eta_t(\psi(\theta_{t^{-1}s}(a))b) = \eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a))b),$$

lo que determina el valor de $\psi(\theta_t(a))$ en términos de $\overline{\phi}$ (porque $\overline{[\eta J]} = D$). Además, como ψ es continua y $\overline{[\theta I]} = C$, los valores de ψ en la órbita de I determinan ψ. Luego ψ queda determinada por ϕ.

Ahora probaremos la existencia. De acuerdo a la discusión anterior, si ψ existe entonces es una contracción y para todo $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \in G$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $b_1, \ldots, b_m \in B$ debe cumplirse que

$$\Delta := \| \sum_{i,j} \eta_{t_j}(\overline{\phi}(\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j)\| \leq \| \sum_i \theta_{s_i}(a_i)\| \| \sum_j \eta_{s_j}(b_j)\|. \tag{3.3.1}$$

Para probar la desigualdad recurriremos al Lema 3.1. Basta mostrar que para todo $r \in G$ y $d \in J$ con $\|d\| \leq 1$ se cumple que

$$\Delta(r,d) := \|\sum_{i,j} \eta_{t_j}(\overline{\phi}(\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j)\eta_r(d)\| \leq \|\sum_i \theta_{s_i}(a_i)\|\|\sum_j \eta_{s_j}(b_j)\|. \tag{3.3.2}$$

Con sólo calcular $\eta_{r^{-1}}$ en el elemento de D del lado izquierdo de la desigualdad obtenemos que

$$\Delta(r,d) = \|\sum_{i,j} \eta_{r^{-1}t_j}(\overline{\phi}(\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j)d\|.$$

El elemento $\eta_{r^{-1}t_j}(\overline{\phi}(\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j)d$ pertenece a $J_{r^{-1}t_j} = \phi(I_{r^{-1}t_j})B$. Ya que las sumas son finitas podemos conseguir unidades aproximadas $\{e^j_\lambda\}_\lambda$ de $I_{t_j^{-1}r}$ y $\{f^j_\mu\}_\mu$ de $J_{t_j^{-1}r}$, todas indexadas en el mismo conjunto[2]. Luego se cumple que

$$\begin{aligned}
\Delta(r,d) &= \lim_\mu \lim_\lambda \|\sum_{i,j} \phi(\alpha_{r^{-1}t_j}(e^j_\lambda))\eta_{r^{-1}t_j}(\overline{\phi}(\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j)d\beta_{r^{-1}t_j}(f^j_\mu)\| \\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \|\sum_{i,j} \phi(\alpha_{r^{-1}t_j}(e^j_\lambda))\beta_{r^{-1}t_j}(\overline{\phi}(\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j\eta_{t_j^{-1}r}(d)f^j_\mu)\| \\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \|\sum_{i,j} \beta_{r^{-1}t_j}(\phi(e^j_\lambda\theta_{t_j^{-1}s_i}(a_i))b_j\eta_{t_j^{-1}r}(d)f^j_\mu)\| \\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \|\sum_{i,j} \phi(\alpha_{r^{-1}t_j}(e^j_\lambda)\theta_{r^{-1}s_i}(a_i))\beta_{r^{-1}t_j}(b_j\eta_{t_j^{-1}r}(d)f^j_\mu)\| \\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \|\sum_{i,j} \phi(\alpha_{r^{-1}t_j}(e^j_\lambda))\overline{\phi}(\theta_{r^{-1}s_i}(a_i)))\beta_{r^{-1}t_j}(b_j\eta_{t_j^{-1}r}(d)f^j_\mu)\| \\
&= \lim_\mu \|\sum_{i,j} \overline{\phi}(\theta_{r^{-1}s_i}(a_i)))\beta_{r^{-1}t_j}(b_j\eta_{t_j^{-1}r}(d)f^j_\mu)\| \\
&= \lim_\mu \|\sum_{i,j} \overline{\phi}(\theta_{r^{-1}s_i}(a_i)))\eta_{r^{-1}t_j}(b_j)d\beta_{t_j^{-1}r}(f^j_\mu)\| \\
&= \|\sum_{i,j} \overline{\phi}(\theta_{r^{-1}s_i}(a_i)))\eta_{r^{-1}t_j}(b_j)d\| \\
&\leq \|\sum_i \theta_{r^{-1}s_i}(a_i))\|\sum_j \eta_{r^{-1}t_j}(b_j)\|\|d\| \\
&\leq \|\sum_i \theta_{s_i}(a_i))\|\sum_j \eta_{t_j}(b_j)\|
\end{aligned}$$

Como indicamos más arriba las desigualdades anteriores implican la desigualdad 3.3.1. Denotemos $\mathcal{B}(D)$ al conjunto de los operadores lineales continuos de D en D. La desigualdad 3.3.1 implica que existe un único operador lineal y contractivo $\psi\colon C \to \mathcal{B}(D)$ tal que $\psi(\theta_s(a))\eta_t(b) = \beta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a)b))$, para todo $a \in I$, $b \in J$ y $r, s \in G$.

[2] Basta tomar una unidad aproximada de cada una y construir nuevas unidades aproximadas utilizando como conjunto de índices el producto de los conjuntos de índices.

Necesitamos mostrar que la imagen de ψ está contenida en $M(B)$. Para esto basta mostrar que, para cada $r \in G$ y $a \in I$, $\psi(\theta_s(a))$ es adjuntable con adjunto $\psi(\theta_r(a^*))$. Utilizando argumentos de linealidad y continuidad vemos que basta mostrar que para todo $c, d \in J$ y $s, t \in G$ se cumple que $\langle \psi(\theta_r(a))\eta_s(c)|\eta_t(d)\rangle = \langle \eta_s(c)|\psi(\theta_r(a^*))\eta_t(d)\rangle$.

Es evidente que $\langle \psi(\theta_r(a))\eta_s(c)|\eta_t(d)\rangle = \eta_s(c^*\overline{\phi}(\theta_{s^{-1}r}(a^*))\eta_{s^{-1}t}(d))$. Observamos que el producto $c^*\overline{\phi}(\theta_{s^{-1}r}(a^*))\eta_{s^{-1}t}(d)$ pertenece a $J_{s^{-1}r} \cap J_{s^{-1}t} = \phi(I_{s^{-1}r})J_{s^{-1}t}$ pues

$$c^*\overline{\phi}(\theta_{s^{-1}r}(a^*)) \in (\overline{\phi}(\theta_{s^{-1}r}(I))\phi(I)J)^* = (\phi(\theta_{s^{-1}r}(I)I)J)^* = (\phi(I_{s^{-1}r})J)^* = J_{s^{-1}r}.$$

Si $\{e_\lambda\}_\lambda$ es una unidad aproximada de $I_{s^{-1}t}$ y $\{f_\mu\}_\mu$ una de $J_{t^{-1}s}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \psi(\theta_r(a))\eta_s(c)|\eta_t(d)\rangle &= \lim_\mu \lim_\lambda \eta_s(c^*\phi(e_\lambda)\overline{\phi}(\theta_{s^{-1}r}(a^*))\eta_{s^{-1}t}(d)\beta_{s^{-1}t}(f_\mu))\\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \eta_s(c^*\phi(e_\lambda\theta_{s^{-1}r}(a^*))\beta_{s^{-1}t}(df_\mu))\\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \eta_s(c^*\phi(\alpha_{s^{-1}t}(\alpha_{t^{-1}s}(e_\lambda)\theta_{t^{-1}r}(a^*))\beta_{s^{-1}t}(df_\mu))\\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \eta_s(c^*\beta_{s^{-1}t}(\phi(\alpha_{t^{-1}s}(e_\lambda)\theta_{t^{-1}r}(a^*))df_\mu))\\
&= \lim_\mu \lim_\lambda \eta_s(c^*\beta_{s^{-1}t}(\phi(\alpha_{t^{-1}s}(e_\lambda))\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(a^*))df_\mu))\\
&= \lim_\mu \eta_s(c^*\beta_{s^{-1}t}(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(a^*))df_\mu))\\
&= \lim_\mu \eta_s(c^*\eta_{s^{-1}t}(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(a^*))d)\beta_{s^{-1}t}(f_\mu))\\
&= \eta_s(c^*\eta_{s^{-1}t}(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(a^*))d))\\
&= \eta_s(c)^*\eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(a^*))d))\\
&= \langle \eta_s(c)^*|\psi(\theta_r(a^*))\eta_t(d)\rangle.
\end{aligned}$$

Para terminar de mostrar que $\psi\colon C \to M(D)$ es un $*-$homomorfismo basta mostrar que es multiplicativo. Esto se reduce a mostrar que para todo $a, b \in I$, $c \in J$ y $r, s, t \in G$ se cumple que $\psi(\theta_s(a))\psi(\theta_r(b))\eta_t(c) = \psi(\theta_s(a)\theta_r(b))\eta_t(c)$. Comparado con los cálculos anteriores esto es sencillo, ya que

$$\begin{aligned}
\psi(\theta_s(a))\psi(\theta_r(b))\eta_t(c) &= \psi(\theta_s(a))\eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(b))c) = \eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a))\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}r}(b))c)\\
&= \eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a)\theta_{t^{-1}r}(b))c) = \eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a\theta_{s^{-1}r}(b)))c)\\
&= \psi(\theta_s(a\theta_{s^{-1}r}(b)))\eta_t(c) = \psi(\theta_s(a)\theta_r(b))\eta_t(c).
\end{aligned}$$

Lo último que nos resta mostrar es que ψ es equivariante, para lo cual es suficiente mostrar que $\psi(\theta_r(\theta_s(a)))\eta_r(\eta_t(c)) = \eta_r(\theta_s(a)\eta_t(c))$. La definición de ψ y el hecho de que

θ y η son acciones en C*-álgebras implican que

$$\begin{aligned}\psi(\theta_r(\theta_s(a)))\eta_r(\eta_t(c)) &= \psi(\theta_{rs}(a))\eta_{rt}(c) = \eta_{rt}(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a))c) \\ &= \eta_r(\eta_t(\overline{\phi}(\theta_{t^{-1}s}(a))c)) = \eta_r(\phi(\theta_s(a))\eta_t(c)).\end{aligned}$$

□

Recordemos que el centro de un álgebra B es $\mathcal{Z}(B) := \{b \in B \colon \forall\ c \in B\ cb = bc\}$ y que un homomorfismo entre álgebras, $\phi\colon A \to B$, es central si $\phi(A) \subset \mathcal{Z}(B)$.

Corolario 3.13. *Con la notación del enunciado anterior se cumple que ϕ es central si y solamente si ψ lo es.*

Demostración. Mostremos primero que para todo $T \in M(A)$ las siguientes condiciones son equivalentes: (i) T conmuta con todos los elementos de $M(A)$ y (ii) T conmuta con todos los elementos de A. Es evidente que (i) implica (ii). Recíprocamente, para todo $S \in M(A)$ y $a \in A$ se cumple que $TS(a) = TSa = SaT = STa = ST(a)$, lo que nos dice que $ST = TS$.

En caso que ψ sea central para todo $b \in B$ y $a \in A$ se cumple que $\kappa(\phi(a)b) = \psi(a)\kappa(b) = \kappa(b)\psi(a) = (\psi(a^*)\kappa(b^*))^* = (\kappa(\phi(a^*)b^*))^* = \kappa(b\phi(a))$, y como κ es inyectivo esto implica que $\phi(a)b = b\phi(a)$.

Veamos ahora que ψ es central si ϕ lo es. Utilizando los argumentos del primer párrafo y argumentos de linealidad y continuidad observamos que basta con mostrar que $\psi(\gamma_r(\iota(a)))\eta_t(\kappa(\phi(a')b)) = \eta_t(\kappa(\phi(a')b))\psi(\gamma_r(\iota(a)))$, para todo $r, t \in G$ $a, a' \in A$ y $b \in B$. Esa igualdad se deduce de la siguiente secuencia de igualdades, en las cuales resulta conveniente suponer $A \subset C$ y $B \subset D$ para simplificar la notación (ι y κ son las inclusiones canónicas):

$$\begin{aligned}\psi(\theta_r(a))\eta_t(\phi(a')b) &= \eta_t\left(\psi(\theta_{t^{-1}r}(a))\phi(a')b\right) = \eta_t\left(\psi(\theta_{t^{-1}r}(a)a')b\right) \\ &= \eta_t\left(\phi(\theta_{t^{-1}r}(a)a')b\right) = \eta_t\left(b\phi(\theta_{t^{-1}r}(a)a')\right) \\ &= \eta_t\left(b\psi(\theta_{t^{-1}r}(a))\phi(a')\right) = \eta_t\left(\phi(a')b\psi(\theta_{t^{-1}r}(a))\right) \\ &= \eta_t\left(\phi(a')b)\right)\psi(\theta_r(a)).\end{aligned}$$

□

En álgebras con unidad la condición necesaria y suficiente para la existencia de una globalización se reduce a que todos los dominios sean unitales.

En la siguiente prueba utilizaremos dos hechos. Digamos que I y J son ideales cerrados unitales de la C*-álgebra A, siendo sus unidades 1_I y 1_J. El primero es que 1_I conmuta con cualquier elemento de A y el segundo es que $1_I 1_J$ es la unidad de $I \cap J$. Lo segundo es inmediato. En cuanto a lo primero, tomando $a \in A$ se tiene $1_I a, a1_I \in I$ y por lo tanto $1_I a = 1_I a 1_I = a1_I$.

Para acciones en álgebras el siguiente resultado se debe a Dokuchaev y Exel [DE05]. Observe el lector toda acción parcial en una C*-álgebra que tiene una globalización es una acción parcial en una $\mathbb{C}-$álgebra que tiene una globalización (en el sentido de [DE05]). Por ese motivo la prueba del directo es idéntica a la de Dokuchaev y Exel.

Teorema 3.14. *Supongamos que α es una C*-acción parcial de G en A y que A tiene unidad. Luego α tiene una globalización si y solamente si $\forall\ t \in G$ A_t tiene unidad.*

Demostración. Para mostrar el directo podemos asumir que A es un ideal de una C*-álgebra B y que existe una C*-acción parcial β de G en B de manera que $\alpha = \beta|_B$. Si 1_A es la unidad de A entonces $\beta_t(1_A)$ es la unidad de $\beta_t(A)$ y por lo tanto $1_t := 1_A\beta_t(1_A)$ es la unidad de $A_t = A \cap \beta_t(A)$.

Para demostrar el recíproco utilizaremos el Teorema 3.2. Definamos $u_t(a,b) = \alpha_t(a1_{t^{-1}})b$. Luego para todo $c \in A_t$ se cumple que

$$u_t(a,b)c = \alpha_t(a1_{t^{-1}})bc = \alpha_t(a1_{t^{-1}}\alpha_{t^{-1}}(bc)) = \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(bc)).$$

En estas condiciones el Teorema 3.2 nos asegura que α es globalizable. $\square$

Observación 3.15. En las condiciones del Teorema anterior, y si α tiene una globalización, entonces la función $t \mapsto 1_t$ es localmente constante porque es continua y $\{1_t\}_{t\in G}$ es una familia de proyecciones que conmutan dos a dos, por lo que la distancia entre cualesquiera dos de sus elementos es 1 o 0.

3.4. Operadores adjuntables

Digamos que γ y δ son $\alpha-$acciones parciales de G en $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ y que $(\varrho, \iota, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}I)$ y $(\chi, \kappa, \mathcal{U}_B, \mathcal{U}J)$ son globalizaciones envolventes de γ y δ, respectivamente (I es un ideal de A y J uno de B).

El Corolario 1.82 nos dice que $(\varrho^r, \iota^r, A, I)$ y (χ^r, κ^r, B, J) son globalizaciones envolventes de α y, ya que son universales, existe un único isomorfismo $\pi\colon \varrho^r \to \chi^r$de manera que $\pi \circ \iota^r = \kappa^r$. De hecho, procediendo como en el Teorema 1.70, podemos hacer de $\mathcal{U}$ un $A-$módulo de Hilbert (utilizando el isomorfismo π) de manera que χ es una acción en módulos de Hilbert en $\mathcal{U}_A$, $(\chi, \kappa, \mathcal{U}_A, \mathcal{U}I)$ es una globalización de δ (con la nueva estructura de módulo en $\mathcal{U}$) y $(\chi^r, \kappa^r, A, I) = (\varrho^r, \iota^r, A, I)$.

Supongamos que ya hemos hecho los cambios explicados arriba y llamemos β a ϱ^r. Luego ϱ y χ son $\beta-$acciones y $\iota^r = \kappa^r$. Lo que queremos es comparar $\mathbb{B}(\gamma, \delta)$ con $\mathbb{B}(\varrho, \chi)$. Veremos que son isomorfos en algún sentido.

Lo primero es dejar de trabajar con globalizaciones para pasar a trabajar con restricciones.

Lema 3.16. *Supongamos que α y α' son acciones parciales en C*-álgebras, que γ y δ son $\alpha-$acciones parciales, que γ' y δ' son $\alpha'-$acciones parciales y que $\phi\colon \gamma \to \gamma'$ y $\psi\colon \delta \to \delta'$ son isomorfismos de acciones parciales en módulos de Hilbert tales que $\phi^r = \psi^r$. Luego para cada $T\colon \gamma \to \delta$ adjuntable se cumple que $\psi \circ T \circ \phi^{-1}\colon \gamma' \to \delta'$ es adjuntable y $(\psi \circ T \circ \phi^{-1})^* = \phi \circ T^* \circ \psi^{-1}$. Además la función $\rho\colon \mathbb{B}(\gamma, \delta) \to \mathbb{B}(\gamma', \delta')$, $T \mapsto \psi \circ T \circ \phi^{-1}$, es una isometría lineal que es un $\mathrm{SOT} - \mathrm{SOT}$ ($*\,\mathrm{SOT} - *\,\mathrm{SOT}$) homeomorfismo.*

Demostración. Es claro que $\psi \circ T \circ \phi^{-1}$ es un morfismo de acciones parciales en conjuntos. Para mostrar que es adjuntable necesitamos dar nombres a los módulos. Digamos que γ, δ, γ' y δ' son acciones parciales en $\mathcal{X}_A$, $\mathcal{Y}_A$, $\mathcal{X}'_B$ y $\mathcal{Y}'_B$, respectivamente.

Para cada $x \in \mathcal{X}'$ e $y \in \mathcal{Y}'$ se cumple que

$$\begin{aligned}\langle \psi \circ T \circ \phi^{-1}(x) | y \rangle_B &= \psi^r(\langle T \circ \phi^{-1}(x) | \psi^{-1}(y) \rangle_A) = \psi^r(\langle \phi^{-1}(x) | T^* \circ \psi^{-1}(y) \rangle_A) \\ &= \phi^r(\langle \phi^{-1}(x) | T^* \circ \psi^{-1}(y) \rangle_A) = \langle x | \phi \circ T^* \circ \psi^{-1}(y) \rangle_B,\end{aligned}$$

lo que prueba que $\psi \circ T \circ \phi^{-1}$ es adjuntable con adjunto $\phi \circ T^* \circ \psi^{-1}$. Además $\|\psi \circ T \circ \phi^{-1}\| = \|T\|$, ya que ϕ y ψ son isometrías sobreyectivas; es decir que ρ es una isometría.

Veamos que ρ es SOT continua. Si la red $\{T_i\}_i \subset \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ SOT $-$converge a $T \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$, entonces para todo $x \in \mathcal{X}'$

$$\rho(T)(x) = \psi(T\phi^{-1}(x)) = \lim_i \psi(T_i \phi^{-1}(x)) = \lim_i \rho(T_i)(x).$$

Esto muestra que ρ es SOT continua. Además es un homeomorfismo respecto de estas topologías ya que $\rho^{-1}(S) = \phi \circ S \circ \psi^{-1}$.

Si ahora asumimos que la red converge según la topología $*\,\mathrm{SOT}$, entonces $\{\rho(T_i)\}_i$ SOT $-$converge a $\rho(T)$. Como $\rho(T_i)^* = \rho^{-1}({T_i}^*)$ lo de arriba implica que $\{\rho(T_i)^*\}_i$ SOT $-$converge a $\rho(T)$. Esto muestra que ρ es $*\,\mathrm{SOT}$ continua e implica que ρ^{-1} es $*\,\mathrm{SOT}$ continua. $\square$

Para mostrar el isomorfismo entre $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$ y $\mathbb{B}(\varrho,\chi)$ necesitamos un resultado que nos permita extender operadores adjuntables.

Lema 3.17. *Supongamos que γ y δ son $\alpha-$acciones parciales en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_A$, respectivamente, que I es un ideal de A y que $T\colon \mathcal{X}I \to \mathcal{Y}I$ es homomorfismo de $I-$módulos y un morfismo de acciones parciales continuas entre $\gamma|_{\mathcal{X}I}$ y $\delta|_{\mathcal{Y}I}$. Luego existe una única función lineal y continua $\overline{[T]}\colon \overline{[\mathcal{X}I]} \to \overline{[\mathcal{Y}I]}$ que extiende a T, es un morfismo de $A-$módulos y es un morfismo de acciones parciales en conjuntos entre las restricciones de γ y δ al dominio y codominio de $\overline{[T]}$, respectivamente. Además $\|T\| = \|\overline{[T]}\|$.*

Demostración. Probemos que T es un morfismo de $A-$módulos. Tomemos $x \in \mathcal{X}$, $a \in A$, y una unidad aproximada (f_k) de I. Como T es continua se cumple que

$$T(xa) = \lim_k T(xf_k a) = \lim_k T(x)f_k a = (\lim_k T(x)f_k)a = T(x)a.$$

En cuanto a la construcción de $\overline{[T]}$ el Teorema 1.79 implica que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\overline{[\gamma\mathcal{X}I]} = \mathcal{X}$, $\overline{[\delta\mathcal{Y}I]} = \mathcal{Y}$ y $\overline{[\alpha I]} = A$.

En caso de existir $\overline{[T]}$ ésta queda determinada por sus valores en $[\gamma\mathcal{X}I]$. Además, como también debe ser una función lineal, queda determinada por sus valores en la órbita de $\mathcal{X}I$. Fijemos $t \in G$ y $x \in \gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}I)$. Luego la unicidad de $\overline{[T]}$ se deduce de que

$$\overline{[T]}(x) = \overline{[T]}(\gamma_t \circ \gamma_{t^{-1}}(x)) = \delta_t(T\gamma_{t^{-1}}(x)).$$

Ahora el problema reside en construir $\overline{[T]}$. Primero construiremos lo que será la restricción de $\overline{[T]}$ a $[\mathcal{X}I]$, que será llamada $[T]$. Tomemos un natural n, $t_1,\ldots,t_n \in G$ y $x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{X}$ de manera que $x_i \in \mathcal{X}_{t_i^{-1}} \cap \mathcal{X}I$. Los comentarios del párrafo anterior implican que debe cumplirse que

$$[T](\sum_i \gamma_{t_i}(x_i)) = \sum_i \delta_{t_i}(T(x_i)). \tag{3.4.1}$$

Para ver que existe una única función lineal continua $[T]\colon [\mathcal{X}I] \to \mathcal{Y}$ que cumple la ecuación anterior basta mostrar que $\|\sum_i \delta_{t_i}(T(x_i))\| \leq \|T\|\|\sum_i \gamma_{t_i}(x_i)\|$. Para esto usaremos el Lema 3.1. Fijemos $s \in G$ y $a \in A_{s^{-1}}I$ con $\|a\| \leq 1$. Veamos que $\|\sum_i \delta_{t_i}(T(x_i))\alpha_s(a)\| \leq \|T\|\|\sum_i \gamma_{t_i}(x_i)\|$.

A partir de unidades aproximadas de cada A_{t_i} podemos construir unidades aproximadas $\{e^i_k\}_{k\in K}$, de A_{t_i}, todas indexadas sobre el mismo conjunto dirigido[3]. Luego el hecho de que $T\colon \gamma|_{\mathcal{X}I} \to \delta_{\mathcal{Y}I}$ es un morfismo de acciones parciales continuas implica que

$$\begin{aligned}
\|\sum_i \delta_{t_i}(T(x_i))\alpha_s(a)\| &= \lim_k \|\sum_i \delta_{t_i}(T(x_i))e^i_k\alpha_s(a)\| \\
&= \lim_k \|\sum_i \delta_{t_i}\left(T(x_i)\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a))\right)\| \\
&= \lim_k \|\sum_i \delta_{s^{-1}t_i}\left(T(x_i)\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a))\right)\| \\
&= \lim_k \|\sum_i \delta_{s^{-1}t_i}\left(T(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a)))\right)\|.
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Nótese que en la tercera igualdad usamos que $T(x_i)\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a)) \in \mathcal{Y}_{t_i^{-1}} \cap \mathcal{Y}_{t_i^{-1}s}$ y que δ_s es una isometría. En la cuarta igualdad usamos que T es un morfismo de $A-$módulos.

Ahora, para poder cambiar $\delta_{s^{-1}t_u} \circ T$ por $T \circ \gamma_{s^{-1}t_i}$, debemos mostrar que el elemento $\gamma_{s^{-1}t_i}(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a)))$ pertenece a $\mathcal{X}I$. Si $\{f_l\}_l$ es una unidad aproximada de A_s entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_{s^{-1}t_i}(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a))) = \gamma_{s^{-1}}\left(\gamma_{t_i}(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a)))\right) &= \gamma_{s^{-1}}\left(\gamma_{t_i}(x_i)e^i_k\alpha_s(a)\right) \\
&= \lim_l \gamma_{s^{-1}}\left(\gamma_{t_i}(x_i)e^i_k f_l\alpha_s(a)\right) \\
&= \lim_l \gamma_{s^{-1}}\left(\gamma_{t_i}(x_i)e^i_k f_l\right) a \in \mathcal{X}I.
\end{aligned}$$

De la igualdad entre el primer y último término de las igualdades (3.4.2) se deduce que

$$\begin{aligned}
\|\sum_i \delta_{t_i}(T(x_i))\alpha_s(a)\| &= \lim_k \|T\left(\sum_i \delta_{s^{-1}t_i}\left(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a))\right)\right)\| \\
&\leq \|T\| \lim_k \|\sum_i \delta_{s^{-1}t_i}\left(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a))\right)\| \\
&\leq \|T\| \lim_k \|\sum_i \delta_{t_i}\left(x_i\alpha_{t_i^{-1}}(e^i_k\alpha_s(a))\right)\| \\
&\leq \|T\| \lim_k \|\sum_i \delta_{t_i}(x_i)e^i_k\alpha_s(a)\| \\
&\leq \|T\|\|\sum_i \gamma_{t_i}(x_i)\|.
\end{aligned}$$

Esto implica que existe una única transformación lineal acotada $[T]\colon [\gamma\mathcal{X}I] \to \mathcal{Y}$ que cumple la ecuación (3.4.1). De hecho puede mostrarse fácilmente que $[T](\mathcal{X}I) \subset \mathcal{Y}I$ después de observar la ecuación (3.4.1) y que $T(x_i) \in T(\mathcal{X})IA_{t^{-1}} \subset \mathcal{Y}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}I$. Definimos

[3]Por ejemplo el conjunto dirigido puede ser el producto de los conjuntos de índices de cada una de las unidades aproximadas

$\overline{[T]}$ como la única extensión continua de $[T]$. Es evidente que $\|T\| = \|\overline{[T]}\|$ ya que $\|\overline{[T]}\| \leq \|T\|$ y que $\overline{[T]}$ es una extensión de T.

Veamos ahora que $\overline{[T]}$ es un morfismo de $A-$módulos. Para mostrar esto basta ver que $\overline{[T]}(\gamma_t(x)a) = \overline{[T]}(\gamma_t(x))a$ para todo $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}I$, $a \in A$ y $t \in G$. Si $\{e_i\}$ es una unidad aproximada de A_t entonces

$$\begin{aligned}\overline{[T]}(\gamma_t(x)a) &= \lim_k \overline{[T]}(\gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(e_i a))) = \lim_k \delta_t(T(x\alpha_{t^{-1}}(e_i a)))\\ &= \lim_k \delta_t(T(x)\alpha_{t^{-1}}(e_i a)) = \lim_k \delta_t(T(x))e_i a = \overline{[T]}(\gamma_t(x))a.\end{aligned}$$

Habiendo mostrado que $\overline{[T]}$ es un morfismo de $A-$módulos tenemos que, para cada $t \in G$, $\overline{[T]}(\mathcal{X}_t) = \overline{[T]}(\mathcal{X}A_t) = \overline{[T]}(\mathcal{X})A_t \subset \mathcal{Y}A_t = \mathcal{Y}_t$.

Finalmente, para mostrar que $\overline{[T]}(\gamma_t(x)) = \delta_t(\overline{[T]}(x))$, para todo $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ y $t \in G$, basta mostrar la igualdad para todo $x \in \gamma_s(\mathcal{X}I \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) \cap \mathcal{X}_{t^{-1}}$ y todo $s \in G$. Debido a que $\gamma_s(\mathcal{X}I \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) \cap \mathcal{X}_{t^{-1}} = \gamma_s(\mathcal{X}I \cap \mathcal{X}_{s^{-1}} \cap \mathcal{X}_{s^{-1}t^{-1}})$ se cumple que

$$\overline{[T]}(\gamma_t(x)) = \overline{[T]}(\gamma_{ts}(\gamma_{s^{-1}}(x))) = \delta_{ts}(T(\gamma_{s^{-1}}(x))) = \delta_t\left(\delta_s(T(\gamma_{s^{-1}}(x)))\right) = \delta_t(\overline{[T]}(x)).$$

□

Corolario 3.18. *Supongamos que* γ, δ, G, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, A, I, α *y* T *son como en la tesis del lema anterior, que* ϱ *es una* $\alpha-$*acción parcial en* $\mathcal{Z}_A$ *y que* $S\colon \mathcal{Y}I \to \mathcal{Z}I$ *es un morfismo de* $I-$*módulos y un morfismo de acciones parciales continuas entre* $\gamma|_{\mathcal{Y}I}$ *y* $\varrho|_{\mathcal{Z}I}$*. Luego* $\overline{[S \circ T]} = \overline{[S]} \circ \overline{[T]}$ *y* $\overline{[\mathrm{id}_{\mathcal{X}I}]} = \mathrm{id}_{\overline{[\mathcal{X}I]}}$.

Demostración. La función $\overline{[S]}\circ\overline{[T]}$ es un morfismo continuo de $A-$módulos y un morfismo de acciones parciales que extiende a $S \circ T$. Luego $\overline{[S \circ T]} = \overline{[S]} \circ \overline{[T]}$. Además es evidente que $\mathrm{id}_{\overline{[\mathcal{X}I]}}$ es una extensión de $\mathrm{id}_{\mathcal{X}I}$ que es un morfismo de $A-$módulos continuo y es un morfismo de acciones parciales. □

Teorema 3.19. *En las hipótesis de Lema 3.17,* T *es adjuntable si y solamente si* $\overline{[T]}$ *es adjuntable. Además, si* T *es adjuntable entonces* $\overline{[T^*]} = \overline{[T]}^*$ *y* T *es autoadjunto (normal, unitario, isometría) si y solamente si* $\overline{[T]}$ *es autoadjunto (respectivamente normal, unitario, isometría).*

Demostración. El recíproco de la primera afirmación es fácil de mostrar. En efecto, debido a que $\overline{[T]}^*$ es un morfismo de módulos tenemos que $\overline{[T]}^*(\mathcal{Y}I) \subset \mathcal{X}I$. Si llamamos $R\colon \mathcal{Y}I \to \mathcal{X}I$ a la restricción de $\overline{[T]}^*$ a $\mathcal{Y}I$ es evidente que R es el adjunto de T ya que $\langle Tx|y\rangle = \langle\overline{[Tx]}|y\rangle = \langle x|R(y)\rangle$, para todo $x \in \mathcal{X}I$ e $y \in \mathcal{Y}I$.

En cuanto al directo, si T es adjuntable entonces el Lema 1.68 implica que T^* es un morfismo de acciones parciales de $\delta|_{\mathcal{Y}I}$ en $\gamma|_{\mathcal{X}I}$, que además es un morfismo de $A-$módulos. Luego el Lema anterior nos da una extensión $\overline{[T^*]}$. Para mostrar que $\overline{[T]}^* = \overline{[T^*]}$ basta mostrar que $\langle\overline{[T]}x|y\rangle = \langle x|\overline{[T^*]}y\rangle$ para todo x en la órbita de $\mathcal{X}I$ y todo y en la órbita de $\mathcal{Y}I$.

Fijemos $s, t \in G$, $x \in \gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}I)$ e $y \in \delta_s(\mathcal{Y}_{s^{-1}} \cap \mathcal{Y}I)$. La igualdad $\langle\overline{[T]}x|y\rangle = \langle x|\overline{[T^*]}y\rangle$ será obtenida a partir de una larga secuencia de igualdades, donde usaremos (reiteradamente) unidades aproximadas. Fijemos una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $A_t \cap \alpha_s(A_{s^{-1}}I)$ y una de $A_{t^{-1}}I$, $\{f_k\}_k$.

Comenzamos observando que $\langle\overline{[T]}x|y\rangle \in A_t\alpha_s(A_{s^{-1}}I)$, luego

$$\langle\overline{[T]}x|y\rangle = \lim_i \langle\delta_t T(\gamma_{t^{-1}}(x))|ye_i\rangle = \lim_i \alpha_t(\langle T\gamma_{t^{-1}}(x)|\delta_{t^{-1}}(ye_i)\rangle).$$

Ahora observamos que $\langle T\gamma_{t^{-1}}(x)|\delta_{t^{-1}}(ye_i)\rangle \in IA_{t^{-1}}$ porque $\gamma_{t^{-1}}(x) \in \mathcal{X}A_{t^{-1}}I$. Continuando con la ecuación de arriba tenemos que

$$\begin{aligned}\langle\overline{[T]}x|y\rangle &= \lim_i \lim_k \alpha_t(\langle T\gamma_{t^{-1}}(x)|\delta_{t^{-1}}(ye_i)f_k\rangle) \\ &= \lim_i \lim_k \alpha_t\langle\gamma_{t^{-1}}(x)|T^*\left(\delta_{t^{-1}}(ye_i\alpha_{t^{-1}}(f_k))\right)\rangle \\ &= \lim_i \lim_k \langle x|\gamma_t T^*\left(\delta_{t^{-1}}(ye_i\alpha_{t^{-1}}(f_k))\right)\rangle = \lim_i \lim_k \langle x|\overline{[T^*]}\left(ye_i\alpha_{t^{-1}}(f_k)\right)\rangle\end{aligned}$$

Ahora usamos que $\overline{[T^*]}$ es un morfismo de $A-$módulos, que $\langle x|\overline{[T^*]}(y)\rangle e_i \in \alpha_t(A_{t^{-1}}I)$ porque $x \in \gamma_t(\mathcal{X}_{t^{-1}}I) = \mathcal{X}\alpha_t(A_{t^{-1}}I)$, y que $\langle x|\overline{[T^*]}y\rangle \in A_{t^{-1}}\alpha_s(A_{s^{-1}}I)$ porque $x \in \mathcal{X}\alpha_t(A_{t^{-1}}I)$ e $y \in \mathcal{Y}\alpha_s(A_{s^{-1}}I)$. Luego

$$\begin{aligned}\langle\overline{[T]}x|y\rangle &= \lim_i \lim_k \langle x|\overline{[T^*]}\left(ye_i\alpha_{t^{-1}}(f_k)\right)\rangle = \lim_i \lim_k \langle x|\overline{[T^*]}(y)\rangle e_i\alpha_{t^{-1}}(f_k) \\ &= \lim_i \langle x|\overline{[T^*]}(y)\rangle e_i = \langle x|\overline{[T^*]}(y)\rangle.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de que $\overline{[T]}$ es adjuntable si T lo es. Por otra parte, si T es autoadjunto entonces $\overline{[T]}^* = \overline{[T^*]} = \overline{[T]}$. Recíprocamente, si $\overline{[T]}$ es autoadjunto entonces T lo es porque T^* es la restricción de $\overline{[T^*]} = \overline{[T]}$ a $\mathcal{X}I$. Por otro lado, si T es normal entonces $\overline{[T]}^*\overline{[T]} = \overline{[T^*T]} = \overline{[TT^*]} = \overline{[T]}\,\overline{[T]}^*$; y si $\overline{[T]}$ es normal entonces TT^* y T^*T son, ambos, la restricción de $\overline{[T]}^*\overline{[T]}$ y por lo tanto $TT^* = T^*T$. Por otro lado, si T es una isometría entonces $\overline{[T]}$ también pues $\overline{[T]}^*\overline{[T]} = \overline{[\mathrm{id}_{\mathcal{X}I}]} = \mathrm{id}_{\overline{[\mathcal{X}I]}}$. De lo anterior se deduce que si T es unitario entonces $\overline{[T]}$ también lo es. Los recíprocos de las dos afirmaciones anteriores se demuestran análogamente a las anteriores. □

Al inicio de la sección 3.4 hemos indicado cómo, a partir de dos $\alpha-$acciones parciales y globalizaciones envolventes de las mismas, construir globalizaciones para colocarnos en las hipótesis del siguiente Teorema.

Teorema 3.20. *Supongamos que γ y δ son $\alpha-$acciones parciales de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_A$, (β,π,B,J) es una globalización de α, $(\varrho,\iota,\mathcal{Z}_B,\mathcal{Z}J)$ una de γ y $(\eta,\kappa,\mathcal{U}_B,\mathcal{U}J)$ una de δ de manera que: $\beta=\chi^r=\delta^r$ y $\pi=\iota^r=\kappa^r$. Luego la función $\rho\colon\mathbb{B}(\gamma,\delta)\to\mathbb{B}(\varrho,\eta)$, $T\mapsto\overline{[\kappa\circ T\circ\iota^{-1}]}$, es una isometría lineal sobreyectiva que restricta a cualquier conjunto acotado es un* $\mathrm{SOT}-\mathrm{SOT}$ *(*$*\mathrm{SOT}-*\mathrm{SOT}$*) homeomorfismo. Además $\rho^{-1}(S)=\kappa^{-1}\circ S|_{\mathcal{Z}}\circ\iota$.*

Demostración. De acuerdo con el Lema 3.16 podemos asumir que $A=J$, $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\mathcal{Z}J=\mathcal{U}J$, $\alpha=\beta|_J$, $\gamma=\varrho|_{\mathcal{Z}J}$ y $\delta=\eta|_{\mathcal{Z}J}$ y que $\iota=\kappa=\mathrm{id}_A$. En esta situación $\rho(T)=\overline{[T]}$ y el Lema 3.17 nos dice que ρ es una isometría y por lo tanto es inyectivo. Además la unicidad dada por la tesis de ese Lema implica que ρ es lineal.

Veamos que ρ es sobreyectivo. Dado $S\in\mathbb{B}(\varrho,\eta)$ sabemos que $S(\mathcal{X})=S(\mathcal{Z}J)=S(\mathcal{Z})J\subset\mathcal{U}J=\mathcal{Y}$ y que $S^*(\mathcal{Y})\subset\mathcal{X}$. Luego la restricción $S|_{\mathcal{X}}\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ es adjuntable. También es un morfismo de acciones parciales en conjuntos entre γ y δ pues $S\colon\varrho\to\eta$ es un morfismo de acciones parciales en conjuntos, $\gamma=\varrho|_{\mathcal{X}}$ y $\delta=\eta|_{\mathcal{Y}}$. La unicidad de $\rho(S|_{\mathcal{X}})$ nos dice que $S=\rho(S|_{\mathcal{X}})$. Por lo tanto $\rho^{-1}(S)=S|_{\mathcal{X}}$.

Supongamos que C es un conjunto acotado de $\mathbb{B}(\gamma,\delta)$. Luego $\rho(C)$ es acotado en $\mathbb{B}(\varrho,\eta)$. Estamos en condiciones de utilizar el Lema 1.67 con $U=\mathcal{X}$, ya que todas las globalizaciones que estamos considerando son minimales.

Dado $x\in\mathcal{X}$ llamemos $p_x\colon\mathbb{B}(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$ y $p'_x\colon\mathbb{B}(\varrho,\eta)\to\mathbb{R}$ a las seminormas que define x. Luego $p_x(T)=\|Tx\|=\|\overline{[T]}x\|=p'_x(\rho(T))$. Es decir que $p_x=p'_x\circ\rho$. Esto último y el Lema 1.67 implican que $\rho|_C\colon C\to\rho(C)$ es un $\mathrm{SOT}-\mathrm{SOT}$ homeomorfismo. Con la topología $*\mathrm{SOT}$ se procede análogamente. □

Corolario 3.21. *Si $(\delta,\iota,\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ es una globalización envolvente de la acción parcial en módulos de Hilbert γ, entonces $\mathbb{B}(\gamma)\to\mathbb{B}(\delta)$, $T\mapsto\overline{[\iota\circ T\circ\iota^{-1}]}$, es un isomorfismo de C^*-álgebras que en conjuntos acotados es un* SOT *y* $*\mathrm{SOT}$ *homeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que ρ es biyectivo, y además el Corolario 3.18 y el Teorema 3.19 implican que ρ preserva la involución y que es multiplicativo. □

Capítulo 4

Acciones parciales propias

Todos los autores que hoy día trabajan con acciones globales propias concuerdan en qué es una acción global propia en un espacio HLC (o en una C*-álgebra conmutativa). El consenso desaparece al pasar a las álgebras no conmutativas.

En este capítulo buscaremos definir el concepto de acción parcial propia. La tarea tiene dos dificultades. La primera es definir las acciones parciales propias en espacios HLC, y la segunda reside en generalizar la definición obtenida a las C*-álgebras en general.

Primero daremos una definición de acción parcial propia en espacios HLC discutiendo entre varias posibilidades, adoptando aquella que permite construir un espacio de órbitas HLC. En las C*-álgebras en general, o en los módulos de Hilbert, elegimos generalizar la definición de Meyer [Mey01] de acción cuadrado integrable. Luego probaremos que toda acción parcial cuadrado integrable en una C*-álgebra conmutativa da lugar a una acción parcial propia en el espectro del álgebra. También mostraremos el Teorema de Estabilización de Kasparov, el cual utilizaremos para mostrar algunos resultados sobre acciones parciales cuadrado integrables y globalizaciones. Finalmente describiremos (a menos de isomorfismo) todas las posibles acciones parciales de grupos libres de torsión y discretos, finitos o no[1], en C*-álgebras unitales, y calcularemos sus productos cruzados.

4.1. En espacios topológicos

Como punto de partida tomaremos la definición de acción global propia en un espacio HLC. Supongamos que σ es una acción global HLC de G en X. Se dice que σ es *propia* si para todo par de compactos $U, V \subset X$ el conjunto $((U, V)) := \{t \in G \colon \sigma_t(U) \cap V \neq \emptyset\}$ es

[1]Existen acciones parciales propias de grupos no compactos en C*-álgebras unitales.

precompacto[2] en G. Equivalentemente (Lema 4.4) si $G\times X \to X\times X,\ (t,x) \to (x,\sigma_t(x))$, es propia (la preimagen de todo compacto es compacta).

Sucede que para las acciones parciales las traducciones directas de esas dos condiciones no resultan equivalentes. Para establecer las traducciones supongamos que σ es una acción parcial HLC de G en X. Llamemos (P1) y (P2) a las siguientes propiedades

(P1) Para todo par de compactos $U,V\subset X$ el conjunto

$$((U,V)) := \{t\in G\colon \sigma_t(X_{t^{-1}}\cap U)\cap V\neq\emptyset\} \text{ es precompacto.}$$

(P2) La función $P_\sigma\colon\Gamma_\sigma\to X\times X,\ (t,x)\mapsto(x,\sigma_t(x))$, es propia.

Hay situaciones, bastante simples, con la propiedad (P1) pero no con (P2).

Ejemplo 4.1. Tomemos $Y=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $G=\mathbb{R}$ y τ la acción parcial definida por el flujo de la ecuación diferencial $(\dot{x},\dot{y})=(1,0)$. Para ver que τ tiene la propiedad (P1) tomemos dos compactos de Y, U y V, y llamemos A y B a sus respectivas proyecciones en la primera coordenada. Luego $((U,V))\subset A-B$, lo que nos dice que $((U,V))$ está acotado y por lo tanto es precompacto. Para mostrar que τ no tiene la propiedad (P2) llamemos U al segmento de recta $[(-2,1),(-1,0)]$ y $V:=[(1,1),(1,0)]$. Luego ${P_\tau}^{-1}(U\times V)=\{(t+2,t,-1-t)\colon t\in[-2,1)\}$ no es compacto y P_τ no es propia.

La propiedad (P2) siempre implica la (P1), en realidad implica algo más fuerte:

(P3/2) Para todo par de compactos de X, U y V, el conjunto $((U,V))$ es compacto.

Observación 4.1. Si σ es una acción parcial HLC de G en X entonces dados conjuntos $U,V,W\subset X$ se tiene $((U\cup V,W))\subset((U,W))\cup((V,W))$ y $((U,V\cup W))\subset((U,V))\cup((U,W))$. Además la unión de una cantidad finita de subconjuntos precompactos de un espacio HLC es precompacto. Luego la propiedad (P1) es equivalente a

- Dados $x,y\in X$ existen entornos U_x y U_y, de x e y respectivamente, tales que $((U_x,U_y))$ es precompacto.

Lema 4.2. *Para toda acción parcial HLC se cumple que (P2) ⇒ (P3/2) ⇒ (P1) pero ninguno de los recíprocos es verdadero en general.*

Demostración. Supongamos que σ es una acción parcial HLC de G en X. Como G es de Hausdorff todo compacto de G es cerrado y por lo tanto también precompacto. Luego

[2] Tiene clausura compacta.

(P3/2) implica (P1). Asumamos que se cumple (P2), tomemos un par de compactos de X, U y V, y una red $\{t_i\}_{i\in I}$ contenida en $((U,V))$. Basta mostrar que $\{t_i\}_{i\in I}$ tiene una subred convergente.

Existe una red $\{x_i\}_{i\in I}\subset U$ de manera que $\{(t_i,x_i)\}_{i\in I}\subset \Gamma_\sigma$ y $\{\sigma_{t_i}(x_i)\}_{i\in I}\subset V$. Por lo tanto $\{(t_i,x_i)\}_{i\in I}\subset K := {P_\sigma}^{-1}(U\times V)$. Como K es compacto $\{(t_i,x_i)\}_{i\in I}$ tiene una subred convergente. Luego $\{t_i\}_{i\in I}$ tiene una subred convergente.

Para mostrar que (P1) no implica (P3/2) basta tomar el Ejemplo 4.1 con los conjuntos U y V que allí aparecen y observar que $((U,V)) = [-2,-1)$. El ejemplo que damos a continuación tiene la propiedad (P3/2) pero no la (P2), por lo que damos por terminada la prueba. □

Ejemplo 4.2. Pensemos en lo que sería el "tiempo 1" de la acción parcial del Ejemplo 4.1. Explícitamente, $Z=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $G=\mathbb{Z}$ y $\upsilon := (\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$, donde $\tau = (\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}},\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ es la acción parcial del Ejemplo anterior. Utilizando argumentos análogos a los del Ejemplo 4.1 se demuestra que υ tiene la propiedad (P3/2). Para ver que no tiene la (P2) observamos que

$$ {P_\upsilon}^{-1}([(-1,1),(-1,0)]\times[(1,1),(1,0)]) = \{2\}\times([(-1,1),(-1,0)]-(-1,0)) $$

no es compacto.

La propiedad de ser una acción parcial propia debería ser invariante por isomorfismos. Desafortunadamente esto no nos ayuda a elegir entre las propiedades (P-).

Lema 4.3. *Las tres propiedades (P-) son invariantes por isomorfismos y toda restricción a un abierto de una acción parcial (HLC) con la propiedad (Pk) tiene la propiedad (Pk) ($k=1,3/2,2$).*

Demostración. Supongamos que $f\colon\sigma\to\tau$ es un isomorfismo de acciones parciales HLC, siendo σ y τ acciones parciales de G en X e Y, respectivamente. Para todo par de compactos $U,V\subset X$ se cumple que $((U,V)) = ((f(U),f(V)))$. Como f es un homeomorfismo de X en Y la igualdad anterior implica que σ tiene la propiedad (Pk) ($k=1,3/2$) si y solamente si τ la tiene.

Por otra parte las funciones $g\colon\Gamma_\sigma\to\Gamma_\tau$, $g(t,x)=(t,f(x))$, y $h\colon X\times X\to Y\times Y$, $h(x,y)=(f(x),f(y))$ son homeomorfismos y para todo compacto $C\subset X\times X$ se cumple que $g({P_\sigma}^{-1}(C)) = {P_\tau}^{-1}(h(C))$. Luego σ tiene la propiedad (P2) si y solamente si τ la tiene.

Supongamos ahora que Y es un abierto de X y que $\tau=\sigma|_Y$. Dados compactos de Y, U y V, éstos con compactos en X y se cumple que $((U,V))_\sigma = ((U,V))_\tau$, donde el subíndice indica cuál acción parcial estamos usando para calcular el conjunto $((U, V))$. De lo anterior se deduce que τ tiene la propiedad (Pk) ($k = 1, 3/2$) si σ la tiene.

Finalmente supongamos que σ tiene la propiedad (P2). Dado un compacto $C \subset Y \times Y$, $P_\sigma{}^{-1}(C)$ es compacto en Γ_σ porque C es compacto en $X \times X$. Además $P_\sigma{}^{-1}(C) \subset \Gamma_\tau$ y $P_\sigma{}^{-1}(C) = P_\tau{}^{-1}(C)$, por lo que $P_\tau{}^{-1}(C)$ es compacto en Γ_τ. □

Lema 4.4. *Sea σ una acción parcial HLC de G en X. Si σ tiene una globalización (en tanto acción parcial HLC) entonces las tres propiedades (P-) son equivalentes para σ.*

Demostración. Por el Lema anterior podemos asumir que existe una acción global HLC, τ, de G en Y, que X es un abierto de Y, que $\tau|_X = Y$ y que $\tau X = Y$.

De acuerdo con el Lema anterior basta con mostrar que τ tiene la propiedad (P2). Es un hecho conocido que para acciones globales en espacios HLC las propiedades (P2) y (P1) son equivalentes (ver la Observación 4.1 y [Bou66, III.4.4-5]), luego nos alcanza con mostrar que τ tiene la propiedad (P1).

Tomemos compactos $C, D \subset Y$. A partir de que X es HLC y de que $Y = \cup_{t \in G} \tau_t(X)$ se deduce fácilmente que existen compactos $U_1, \ldots, U_n \subset X$ y $r_1, \ldots, r_n \in G$ tales que $C \cup D \subset \cup_{j=1}^n \tau_{r_j}(U_j)$. Con $V_j := \tau_{r_j}(U_j)$ la Observación 4.1 implica que $((C, D)) \subset \cup_{j,k=1}^n ((V_j, V_k))$. Nos bastará con mostrar que $((V_j, V_k))$ es precompacto. Escribamos $((\ ,\ ))_\sigma$ y $((\ ,\ ))_\tau$ para indicar la acción parcial con la que calculamos el conjunto $((\ ,\ ))$. Por un lado $((V_j, V_k))_\tau = r_k((U_j, U_k))_\tau r_j^{-1}$ y, como $\sigma = \tau|_X$, $((U_j, U_k))_\tau = ((U_j, U_k))_\sigma$. Entonces $((V_j, V_k))_\tau = r_k((U_j, U_k))_\sigma r_j^{-1}$ es precompacto porque $((U_j, U_k))_\sigma$ lo es. □

Una propiedad muy usada de las acciones globales propias es que ellas tienen espacios de órbitas HLC. Para tomar una decisión de cuál propiedad (P-) queremos, podemos ver cuáles de ellas dan buenos espacios de órbitas.

Digamos que σ es una acción parcial topológica de G en X. La $\sigma-$*órbita* de $x \in X$, σx, es el conjunto formado por los puntos $y \in X$ para los cuales existe $t \in G$ tal que $x \in X_{t^{-1}}$ e $y = \sigma_t(x)$. Es evidente que todo punto pertenece a su órbita. Dos órbitas, σx y σy, o bien son iguales o bien son disjuntas. En efecto, si existe $z \in \sigma x \cap \sigma y$ tomemos cualquier punto $w \in \sigma x$. Luego existen $r, s, t \in G$ tales que $x \in X_{r^{-1}}$, $y \in X_{s^{-1}}$, $x \in X_{t^{-1}}$ y $\sigma_t(x) = z$, $\sigma_s(y) = z$ y $\sigma_r(x) = w$. Por lo tanto $w = \sigma_r(x) = \sigma_r(\sigma_{t^{-1}}(z)) = \sigma_r(\sigma_{t^{-1}}(\sigma_s(y)))$. La definición de acción parcial en conjuntos implica que $y \in X_{(rst)^{-1}}$ y que $w = \sigma_r(x) = \sigma_r(\sigma_{t^{-1}}(z)) = \sigma_r(\sigma_{t^{-1}}(\sigma_s(y))) = \sigma_{rst}(y)$, lo que nos dice que $w \in \sigma y$. Esto muestra que $\sigma x \subset \sigma y$, por simetría $\sigma y \subset \sigma x$.

Definición 4.5. Dada una acción parcial topológica, σ, el *espacio de órbitas* de σ es el espacio cociente $X/\sigma := \{\sigma x \colon x \in X\}$ equipado con la topología cociente. La proyección canónica será denotada π o π_σ.

Recordemos que la órbita de un conjunto $U \subset X$ ha sido definida[3] como $\sigma U := \cup_{t\in G}\sigma_t(X_{t^{-1}} \cap U) = \cup_{x\in U}\sigma x$. Además $\pi^{-1}(\pi(U)) = \sigma U$ y esta igualdad implica que la órbita de todo abierto es abierta. En otras palabras la proyección canónica es abierta. De ahora en más pensaremos a σU tanto como un subconjunto de X como uno de X/σ. En cada caso quedará claro por contexto de cuál de las dos se trata.

Los espacios de órbitas de los Ejemplos que hemos presentado en este capítulo son fáciles de calcular. Veamos que uno de ellos no tiene espacio de órbitas de Hausdorff.

Ejemplo 4.3. Sea υ la acción parcial descrita en el Ejemplo 4.2. Cada órbita corta exactamente una vez al conjunto $W := ([-1,0) \times \mathbb{R}) \cup ((0,1] \times \{0\})$, así que podemos pensar que W es el espacio de órbitas. Con la topología cociente W no es de Hausdorff porque todo entorno de $(-1/2, 0)$ corta a todo entorno de $(1/2, 0)$. En efecto, tomemos abiertos $\upsilon-$invariantes, U y V, de $(-1/2, 0)$ y $(1/2, 0)$ respectivamente. Podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de manera que $(-1/2, \varepsilon) \in U$ y $(1/2, \varepsilon) \in V$. Además $\upsilon_1(-1/2, \varepsilon) = (1/2, \varepsilon)$. Luego $U \cap V \neq \emptyset$ porque $(1/2, \varepsilon) \in U \cap V$ (U es $\upsilon-$invariante).

Adaptando la Proposición 4.62 de [Aba99] se deduce directamente lo siguiente:

Lema 4.6. *Supongamos que σ es una acción parcial topológica de G en X y que (τ, ι, Z, Y) es una globalización minimal de σ. Luego para todo $x \in X$ se cumple que $\iota(\sigma x) = \tau\iota(x) \cap Y$. Además la función $X \to Z/\tau$, $x \mapsto \tau\iota(x)$, es constante en las $\sigma-$órbitas y la función que ella induce entre los espacios de órbitas, $X/\sigma \to Z/\tau$, $\sigma x \mapsto \tau\iota(x)$, es un homeomorfismo.*

En [Wil07, 3.6] y en [Bou66, III.4.1-2] se encuentra la prueba del siguiente resultado.

Lema 4.7. *Dada una acción global propia y HLC todas sus órbitas son cerradas y su espacio de órbitas es HLC.*

Nos resta saber si es que toda acción parcial HLC con la propiedad (P2) tiene una globalización, también con la propiedad (P2).

Lema 4.8. *Para toda acción parcial HLC σ (de G en X) las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) σ tiene la propiedad (P2).

[3] Después de la Definición 1.1

(b) σ tiene una globalización[4] (τ, ι, Z, Y) *con τ propia.*

(c) σ tiene una globalización y si (τ, ι, Z, Y) es una globalización envolvente de σ entonces τ propia.

Demostración. Es evidente que (c) implica (b). Si (b) es verdadera el Lema 4.3 nos dice que $\tau|_Y$ tiene la propiedad (P2) y, como $\tau|_Y$ es isomorfa a σ, σ también tiene la propiedad (P2).

Veamos que (a) implica (c). Para mostrar que σ tiene una globalización basta mostrar que $\mathrm{Gr}(\sigma)$ es cerrado en $G \times X \times X$. Supongamos que la red $\{(t_i, x_i, y_i)\}_i \subset \mathrm{Gr}(\sigma)$ converge a $(t, x, y) \in G \times X \times X$. Sean U y V entornos compactos de x e y, respectivamente. El conjunto $D := {P_\sigma}^{-1}(U \times V)$ es compacto, y ya que $(x_i, \sigma_{t_i}(x_i)) = (x_i, y_i) \to (x, y)$ y $U \times V$ es un entorno de (x, y), existe un i_0 de manera que $\{(t_i, x_i)\}_{i \geq i_0} \subset D$. Como D es compacto en Γ_σ podemos encontrar $(s, z) \in \Gamma_\sigma$ y una subred $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$ de manera que $(t_{i_j}, x_{i_j}) \to (s, z)$. La unicidad del límite en los espacios de Hausdorff implica que $(s, z) = (t, x)$. Luego $(t, x) \in \Gamma_\sigma$ y $\sigma_t(x) = \lim_i \sigma_{t_i}(x_i) = \lim_i y_i = y$, lo que claramente implica que $(t, x, y) \in \mathrm{Gr}(\sigma)$.

Ahora que sabemos que σ tiene una globalización podemos tomar una globalización envolvente (arbitraria) (τ, ι, Z, Y). El Lema 4.3 implica que podemos asumir que $\sigma = \tau|_Y$ tiene la propiedad (P2) y del Lema 4.4 deducimos que basta mostrar que τ tiene la propiedad (P1), para lo que basta con reproducir la prueba de ese Lema. $\square$

Corolario 4.9. *El espacio de órbitas de toda acción parcial HLC con la propiedad (P2) es HLC.*

Demostración. Basta usar el Lema anterior junto con los Lemas 4.6 y 4.7. $\square$

Creemos que en este punto tenemos los motivos suficientes para justificar lo siguiente.

Definición 4.10. Diremos que una acción parcial es *propia* si es HLC y tiene la propiedad (P2).

Ahora el lector puede volver a interpretar los resultados anteriores como resultados para acciones parciales propias. Por ejemplo el último Corolario dice que el espacio de órbitas de toda acción parcial propia es HLC.

Lema 4.11. *Si σ es una acción parcial HLC de G en X entonces σ es propia si y solamente si para toda red $\{(t_i, x_i)\}_i$ contenida en el dominio de σ, Γ_σ, y de forma que $\{(x_i, \sigma_{t_i}(x_i))\}_i$ está contenida en un compacto de $X \times X$, existe una subred $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$*

[4] Como acción parcial HLC

de forma que $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$ *es convergente en* Γ_σ *(es decir que tiene límite en* $G \times X$ *y que su límite pertenece a* Γ_σ*).*

Demostración. Para mostrar el directo tomemos una red $\{(t_i, x_i)\}_i$ como la dada en la tesis. Sabemos que la función $f\colon \Gamma_\sigma \to X \times X,\ (t, x) \mapsto (x, \sigma_t(x))$, es propia y que existe un compacto $C \subset X \times X$ de forma que $\{(t_i, x_i)\}_i \subset f^{-1}(C) \subset \Gamma_\sigma$. Luego la compacidad de $f^{-1}(C)$ implica lo que queremos mostrar.

Para mostrar el recíproco supongamos que $C \subset X \times X$ es compacto. Ahora nuestra hipótesis nos dice que toda red $\{(t_i, x_i)\}_i \subset f^{-1}(C)$ tiene una subred convergente, $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$, a un punto $(t, x) \in \Gamma_\sigma$. La prueba habrá concluido si logramos mostrar que $(t, x) \in f^{-1}(C)$. Observemos que $f^{-1}(C)$ es cerrado porque f es continua, C es compacto y $X \times X$ es de Hausdorff. Luego $(t, x) \in f^{-1}(C)$ porque es el límite de una red contenida en $f^{-1}(C)$. □

En particular, si X es compacto y σ es una acción parcial HLC en X, entonces σ es propia si y solamente si su dominio es compacto.

4.1.1. Funciones del espacio de órbitas

Una propiedad importante de las acciones (globales) propias, digamos σ de G en X, es que dada $a \in C_c(X)$ puede promediarse el valor a en cada órbita para tener una función constante en las órbitas. Esto también puede hacerse para las acciones parciales propias. Este hecho y otros más se deducen del siguiente resultado.

Lema 4.12. *Supongamos que* σ *es una acción parcial propia de* G *en* X *y que para cada* $x \in X$ *definimos* $G^x := \{t \in G\colon x \in X_t\}$. *Luego cada* G^x *es abierto. Por otro lado si dados* $a \in C_c(X)$ *y* $x \in X$ *se define*

$$F_a(x)(t) := \begin{cases} a(\sigma_{t^{-1}}(x)) \text{ si } t \in G^x \\ 0 \text{ si } t \notin G^x \end{cases},$$

entonces $F_a(x)\colon G \to \mathbb{C},\ t \mapsto F_a(x)(t)$, *es continua y de soporte compacto. Además* $F_a\colon X \to C_0(G),\ x \mapsto F_a(x)$, *es continua y acotada y para cada punto* $x \in X$ *existen un entorno* W *de* x *y un compacto* $K \subset G$ *de manera que* $sop(F_a(y)) \subset K$ *si* $y \in W$.

Demostración. De acuerdo con el Lema 4.8 podemos asumir que existe una acción global propia, τ, de G en Y, que X es un abierto de Y y que $\sigma = \tau|_X$. Fijado $x \in X$ el conjunto G^x es la preimagen de X por la función $\mathrm{ev}_x\colon G \to Y,\ t \mapsto \tau_{t^{-1}}(x)$, que es continua. Por lo tanto cada G^x es abierto.

Tomemos $a \in C_c(X) \subset C_c(Y)$ y $x \in X$. Observemos que $F_a(x) = a \circ \mathrm{ev}_x$, por lo que F_a es continua. Además $\{t\colon a \circ \mathrm{ev}_x(t) \neq 0\} \subset ((\{x\}, \mathrm{sop}(a)))^{-1} =: C$ y C es compacto porque τ es propia. Por lo tanto $\mathrm{sop}(F_a(x))$ es compacto. De hecho $C \subset G^x$, lo que implica que $\mathrm{sop}(F_a(x)) \subset G^x$.

Es evidente que $\|F_a(x)\| \leq \|a\|$, lo que nos dice que F_a está acotada por $\|a\|$.

Fijemos $x \in X$ y mostremos la existencia del entorno y el compacto de la tesis. Tomemos un entorno compacto de x contenido en X, digamos W. Como τ es propia $K := ((W, \mathrm{sop}(a)))^{-1}$ es compacto. Si $y \in W$ y $F_a(y)(t) \neq 0$ entonces $a(\tau_{t^{-1}}(y)) \neq 0$, o sea que $t \in K$. Esto muestra que si $y \in W$ entonces $\mathrm{sop}(F_a(y)) \subset K$.

Para terminar mostremos que F_a es continua. Fijados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tomemos W y K como en el párrafo anterior. Para cada $y \in W$ se cumple

$$\|F_a(x) - F_a(y)\| = \sup_{t \in K} |a(\tau_{t^{-1}}(y)) - a(\tau_{t^{-1}}(x))|.$$

Como a y τ son continuas, para cada $t \in K$ existen un entorno U_t de x y uno V_t de t tales que si $(s, y) \in V_t \times U_t$ entonces $|a(\tau_{s^{-1}}(y)) - a(\tau_{t^{-1}}(x))| < \varepsilon/2$. Como K es compacto existen $t_1, \ldots, t_n \in K$ de manera que $K \subset V_{t_1} \cup \cdots \cup V_{t_1}$. Llamemos W' a $W \cap U_{t_1} \cap \cdots \cap U_{t_1}$. Si $y \in W'$ y $t \in K$ entonces existe un índice $i = 1, \ldots, n$ tal que $(t, y) \in V_{t_i} \times U_{t_i}$, lo que implica que $|a(\tau_{t^{-1}}(y)) - a(\tau_{t^{-1}}(x))| < \varepsilon/2$. Tomando supremo en $t \in K$ obtenemos que para todo $y \in W'$ $\|F_a(x) - F_a(y)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

De ahora en más pensamos a F_a como un elemento de $C_b(X, C_0(G))$. Si el lector no está familiarizado con la topología del límite inductivo en este punto es conveniente que consulte la sección A.3 (en especial para familiarizarse con la notación que usaremos).

Corolario 4.13. *En las hipótesis del Lema anterior para cada $a \in C_c(X)$ la función $F_a\colon X \to C_c(G)$ es continua en la topología del límite inductivo, y por lo tanto con respecto a cualquier norma $\| \ \|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ siendo $\|f\|_p = (\int_G |f(t)|^p \, dt)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Llamemos i. l. t. a la topología del límite inductivo y κ_p a la definida por $\| \ \|_p$. Bastará con mostrar que $\kappa_p \subset$ i. l. t.. De la sección A.3 sabemos que $\kappa_\infty \subset$ i. l. t.. Tomemos ahora $p \in [1, +\infty)$. Basta mostrar que la identidad $\mathrm{id}\colon (C_c(G), \text{i. l. t.}) \to (C_c(G), \kappa_p)$ es continua. Para cada compacto $K \subset G$ y $f \in C_K(G)$ se tiene

$$\| \mathrm{id} \circ \iota_K(f)\| = \left(\int_G |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leq \mu(K)^{1/p} \|f\|_\infty.$$

Esto implica que $\mathrm{id} \circ \iota_K\colon (C_K(G), \| \ \|_\infty) \to (C_c(G), \kappa_p)$ es continua para todo compacto $K \subset G$, lo que implica que id es continua. □

Teorema 4.14. *En las hipótesis del Lema anterior para cada $a \in C_c(X)$ la función*

$$P_a\colon X \mapsto \mathbb{C},\ x \mapsto \int_G F_a(x)(t)\,dt,$$

es continua, acotada y constante en las órbitas.

Demostración. Para mostrar que P_a es continua consideremos $I\colon C_c(G) \to \mathbb{C}$, $I(f) := \int_G f(t)\,dt$. Evidentemente I es una funcional lineal continua con respecto a $\|\ \|_1$ y por lo tanto con respecto a la topología del límite inductivo. Luego el Corolario anterior implica que $P_a = I \circ F_a$ es continua.

Para mostrar que P es constante en las órbitas tomemos $t \in G$ y $x \in X_{t^{-1}}$. Las propiedades de acciones parciales implican que $tG^x = G^{\sigma_t(x)}$. Haciendo el cambio de variables $s = t^{-1}r$ deducimos que

$$P_a(\sigma_t(x)) = \int_{G^{\sigma_t(x)}} a(\sigma_{s^{-1}}(\sigma_t(x))\,ds = \int_{tG^x} a(\sigma_{(t^{-1}s)^{-1}}(x))\,ds = P_a(x).$$

Ahora sabemos que P_a es continua y constante en las órbitas, y por lo tanto existe una única función continua $\widetilde{P_a}\colon X/\sigma \to \mathbb{C}$ tal que $P_a(x) = \widetilde{P_a}(\sigma x)$, para todo $x \in X$. De hecho $\widetilde{P_a}$ tiene soporte compacto. En efecto, si $\widetilde{P_a}(\sigma x) \neq 0$ entonces $\sigma x \cap \mathrm{sop}(a) \neq \emptyset$, lo que nos dice que $\mathrm{sop}(\widetilde{P_a}) \subset \sigma\mathrm{sop}(a)$. Como $\widetilde{P_a}$ es continua y tiene soporte compacto está acotada, de lo que deducimos que P_a está acotada. $\square$

Corolario 4.15. *El conjunto $PC_c(X) := \{\widetilde{P_a}\colon a \in C_c(X)\}$ es un $*-$ideal denso en $C_0(X/\sigma)$ contenido en $C_c(X/\sigma)$. Además $PC_c(X)$ es denso en $C_0(X/\sigma)$ con respecto a la norma del supremo y en $C_c(X\sigma)$ con respecto a la topología del límite inductivo.*

Demostración. En la prueba del Teorema anterior mostramos que $PC_c(X) \subset C_c(X\sigma)$. El Teorema de Stone-Weierstrass implica que para mostrar que $PC_c(X)$ es $\|\ \|_\infty-$denso en $C_0(X/\sigma)$ basta con mostrar que es un $*-$ideal que separa puntos y no se anula. Para ver que no se anula tomemos $x \in X$. Existe $a \in C_c(X)^+$ tal que $a(x) = 1$, o sea que $F_a(x)(e) = 1$. Esto implica que $\widetilde{P_a}(x) > 0$.

Tomemos dos órbitas distintas, $\sigma x \neq \sigma y$. Por el Lema 4.8 podemos asumir que σ es la restricción de una acción global propia τ, de G en Y. Luego $\sigma x = \tau x \cap X$. Es un hecho conocido que las órbitas de una acción global propia son cerradas, o sea que $Y \backslash \tau x$ es abierto en Y. Por lo tanto $X \cap (Y \backslash \tau x) = X \backslash \tau x = X \backslash \sigma x$ es abierto en X y σx es cerrado en X. Como $y \in X \backslash \sigma x$ y σx es cerrado en X existe $a \in C_c(X)^+$ tal que $a(y) = 1$ y $a|_{\sigma x} = 0$. Esto implica que $\widetilde{P_a}(y) > 0$ y $\widetilde{P_a}(x) = 0$. Hemos mostrado que $PC_c(X)$ separa puntos de X/σ.

Recurriendo a la fórmula de F_a puede mostrarse directamente que para toda $a, b \in C_c(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ $F_{a+\lambda b} = F_a + \lambda F_b$ y $F_{a^*} = {F_a}^*$. Luego $P_{a+\lambda b} = P_a + \lambda P_b$ y $P_{a^*} = {P_a}^*$, lo que implica que $PC_c(X)$ es un subespacio cerrado por la involución. Pensemos a $C_b(X/\sigma)$ como la subálgebra de $C_b(X)$ de las funciones constantes en las órbitas. Dada $h \in C_b(X/\sigma)$ se tiene $\widetilde{P_{ah}}(\sigma x) = \int_{G^x} a(\sigma_{s^{-1}}(x))h(\sigma\sigma_{s^{-1}}(x))\,ds = \widetilde{P_a}(\sigma x)h(\sigma x)$. La fórmula nos dice que $\widetilde{P_a}h = \widetilde{P_{ah}} \in PC_c(X)$, lo que implica que $PC_c(X)$ es un ideal y por lo tanto una subálgebra.

Para mostrar que $PC_c(X)$ es denso con la topología del límite inductivo recurriremos al Teorema A.4. Tomemos $a \in C_c(X/\sigma)$ y un compacto K que contiene al soporte de a. Sea $b \in C_c(X/\sigma)$ de forma b es constante igual a 1 en el soporte de a. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $c \in PC_c(X)$ tal que $\|b - c\|_\infty < \varepsilon(\|a\|_\infty + 1)^{-1}$. Luego $ac \in PC_c(X)$ porque $c \in PC_c(X)$, $\mathrm{sop}(ac) \subset K$ y $\|ac - a\|_\infty = \|ac - ab\|_\infty < \varepsilon$. Esto muestra que $a \in \overline{PC_c(X) \cap C_K(X/\sigma)}^{\|\ \|_\infty}$. □

4.2. En módulos de Hilbert

Los Teoremas de Imprimitividad, en particular los de Green y Raeburn [Rie82, Rae88], han provocado intentos por generalizar la noción de acción propia a las acciones en C*-álgebras. El primer intento explícito en este sentido es [Rie90]. También se ha intentado utilizar las acciones propias en C*-álgebras conmutativas para trabajar con álgebras no conmutativas [Kas88].

Nuestro objetivo es estudiar acciones parciales propias en C*-álgebras (conmutativas o no). En primera instancia hay dos opciones a elegir: tomar la definición de acción parcial propia en C*-álgebras conmutativas y tratar de generalizarla o tomar una definición de acción global propia (en C*-álgebras) generalizarla a las acciones parciales. En el segundo caso sería deseable que la definición obtenida sea equivalente a la definición de acción parcial propia en el sentido analizado en la sección anterior. Aquí optaremos por la segunda alternativa.

Necesitamos una definición de acción global propia que en las álgebras conmutativas resulte ser la definición usual. En [Rie04] encontramos tal cosa (Teorema 4.7). Podemos intentar generalizar la definición de acción propia que allí aparece, pero esto parece bastante complicado. En lugar de eso buscamos una definición equivalente que sea más fácil de tratar para las acciones parciales. Por ello utilizaremos la definición de acción parcial cuadrado integrable de Meyer [Mey]. Esta es en realidad una definición de acciones parciales en módulos de Hilbert.

Supongamos que γ es una $\alpha-$acción global de G en $\mathcal{X}_A$. Dados $x, y \in \mathcal{X}$ se define $\langle\langle x|y\colon G \to A,\ t \mapsto \langle\gamma_t(x)|y\rangle$. La idea general es decir que x es cuadrado integrable si para todo $y \in \mathcal{X}$ se tiene que $\langle\langle x|y \in L^2(G, A)$. El conjunto de los elementos cuadrado integrables de $\mathcal{X}$ se denota $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$, donde el subíndice *si* viene del inglés *square integrable*. La acción γ será cuadrado integrable si $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es denso en $\mathcal{X}$.

Tenemos la dificultad de que en las acciones parciales sólo podemos calcular $\gamma_t(x)$ si $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$. Para subsanar esta dificultad es que introducimos ciertas unidades aproximadas.

Fijemos una $\alpha-$acción parcial de G en $\mathcal{X}_A$, γ. Llamaremos $C^\alpha(G, A)$ al conjunto formado por las $\{A_t\}_{t\in G}-$secciones continuas. Es evidente que $C^\alpha(G, A) \subset C(G, A)$. También definimos $C^\alpha_b(C, A) := C^\alpha(G, A) \cap C_b(G, A)$, $C^\alpha_0(C, A) := C^\alpha(G, A) \cap C_0(G, A)$, y $C^\alpha_c(C, A) := C^\alpha(G, A) \cap C_c(G, A)$.

Puede mostrarse fácilmente que $C^\alpha_0(G, A)$ es un ideal de $C_b(G, A)$ y por lo tanto uno de $C_0(G, A)$. Luego $C^\alpha_0(G, A)$ es una C*-álgebra. También es posible encontrar unidades aproximadas de $C^\alpha_0(G, A)$ contenidas en $C^\alpha_c(G, A)$. En efecto, supongamos que $\{e_i\}_{i\in I}$ es una unidad aproximada de $C^\alpha_0(G, A)$ y sea $\{f_j\}_{j\in J}$ el subconjunto de los elementos de $C_c(G)$ con imagen en $[0, 1]$ ordenadas según el orden de $C_0(G)$. Sea $K := I \times J$ con el orden $(i, j) \le (i', j') \ \Leftrightarrow\ i \le i'$ y $j \le j'$. Dado $k = (i, j) \in K$ definimos $g_k \in C^\alpha_c(G, A)$ como $g_k(r) := f_j(r)e_i(r)$. Puede mostrarse que $\{g_k\}_{k\in K}$ es una unidad aproximada de $C^\alpha_0(G, A)$ contenida en $C^\alpha_c(G, A)$.

El $A-$módulo $L^2(G, A)$ es el producto tensorial $L^2(G) \otimes A$, donde el producto interno usual en $L^2(G)$ se define para que sea conjugado lineal en la primera variable y el producto tensorial se construye con la inclusión canónica $\mathbb{C} \to \mathbb{B}(A)$, $\lambda \mapsto \lambda\, \mathrm{id}_A$.

Otra forma de construir (a menos de isomorfismo) $L^2(G, A)$ es completando $C_c(G, A)$ con respecto al producto interno $\langle f|g\rangle := \int_G f(t)^* g(t)\, dt$. Existe un único unitario $U\colon L^2(G, A) \to \overline{C_c(G, A)}$ de manera que $U(f \otimes a)(r) = f(r)a$, para todo $f \in C_c(G)$, $a \in A$ y $r \in G$.

Otra herramienta que utilizaremos es el $*-$homomorfismo $M\colon C_b(G, A) \to \mathbb{B}(L^2(G, A))$ tal que $M_f g(r) = f(r)g(r)$, para toda $f \in C_b(G, A)$, $g \in C_c(G, B)$ y $r \in G$.

Para cada $x \in \mathcal{X}$ y $f \in C^\alpha_c(G, A)$ definimos

$$\langle\langle x|_f\colon \mathcal{X} \to L^2(G, A),\ \langle\langle x|_f(y)|_t := \langle\gamma_t(xf(t^{-1}))|y\rangle. \tag{4.2.1}$$

Para simplificar la notación escribiremos $\langle\langle x|_f y$ en lugar de $\langle\langle x|_f(y)$.

Definición 4.16. Un elemento $x \in \mathcal{X}$ es *cuadrado integrable* (respecto de γ) si para todo $y \in \mathcal{X}$ existe una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C^\alpha_0(G, A)$ contenida en $C^\alpha_c(G, A)$ de manera que $\{\langle\langle x|_{e_i}y\}_i$ es de Cauchy en $L^2(G,A)$. El conjunto de los elementos cuadrado integrables de $\mathcal{X}$ será denotado $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ o $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}^{\gamma}$. Diremos que γ es cuadrado integrable si $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}^{\gamma}$ es denso en $\mathcal{X}$.

Antes de dar un ejemplo concreto de elemento cuadrado integrable nos ocuparemos de un detalle técnico relacionado con las unidades aproximadas que aparecen en la Definición. En primera instancia parecería que para cada x y cada y la red $\{\langle\langle x|_{e_i}y\}_i$ puede converger para algunas unidades aproximadas pero no para otras. En realidad esto no es así: si para una unidad aproximada converge entonces converge para todas las unidades aproximadas y el límite es el mismo para todas ellas.

De ahora en más pensaremos $C_c^{\alpha}(G,A)\subset C_c(G,A)\subset L^2(G,A)$, por lo que $L^2_{\alpha}(G,A)$ es (isomorfo como módulo de Hilbert a) la clausura de $C_c^{\alpha}(G,A)$ en $L^2(G,A)$. Notemos que $L^2_{\alpha}(G,A)$ es un $A-$submódulo pues $C_c^{\alpha}(G,A)A\subset C_c^{\alpha}(G,A)$ y que $M(C_0^{\alpha}(A,G))L^2(G,A)$ es un cerrado y denso en $L^2_{\alpha}(G,A)$, por lo tanto $M(C_0^{\alpha}(A,G))L^2(G,A)=L^2_{\alpha}(G,A)$. Otro punto fundamental en nuestro desarrollo es que toda red de la forma $\{\langle\langle x|_{e_i}y\}_i$ está contenida en $C_c^{\alpha}(G,A)$, por lo que su límite en $L^2(G,A)$ (en caso de existir) pertenece a $L^2_{\alpha}(G,A)$.

En la demostración del siguiente Lema utilizaremos el isomorfismo de C*-álgebras

$$\pi\colon C_b^{\alpha}(G,A)\to C_b^{\alpha}(G,A),\pi(f)(r):=\alpha_r(f(r^{-1})),$$

el cual cumple que $\pi(C_0^{\alpha}(G,A))=C_0^{\alpha}(G,A)$ y que $\pi^2=\mathrm{id}$.

Lema 4.17. *Para todo $x,y\in\mathcal{X}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) Existe una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C_0^{\alpha}(G,A)$ contenida en $C_c^{\alpha}(G,A)$ de manera que $\{\langle\langle x|_{e_i}y\}_i$ es de Cauchy en $L^2(G,A)$.

(b) Para toda unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C_0^{\alpha}(G,A)$ contenida en $C_c^{\alpha}(G,A)$ la red $\{\langle\langle x|_{e_i}y\}_i$ es de Cauchy en $L^2(G,A)$.

Además, el límite de la red $\{\langle\langle x|_{e_i}y\}_i$ (si existe) no depende de la unidad aproximada y para toda $f\in C_c^{\alpha}(G,A)$ se cumple que $M_{\pi(f)^*}\,\mathrm{lím}_i\langle\langle x|_{e_i}y=\langle\langle x|_f y$.

Demostración. Es evidente que (b) implica (a). Asumamos que se cumple (a) y tomemos $f\in C_c^{\alpha}(G,A)$ para mostrar que $M_{\pi(f)^*}\,\mathrm{lím}_i\langle\langle x|_{e_i}y=\langle\langle\langle x|_f y|h\rangle$. Para simplificar la notación definimos $g:=\mathrm{lím}_i\langle\langle x|_{e_i}y$. Dada $h\in C_c^{\alpha}(G,A)$ se tiene que

$$\langle\langle\langle x|_f y|h\rangle=\int_G\langle y|\gamma_r(xf(r^{-1}))\rangle h(r)\,dr=\int_G\langle y|\gamma_r(xf(r^{-1})\alpha_{r^{-1}}(h(r)))\rangle\,dr. \tag{4.2.2}$$

Definamos, para cada i, $F_i \in C_c^\alpha(G,A)$ como $F_i(r) = \langle y|\gamma_r(xe_i(r^{-1})f(r^{-1})\alpha_{r^{-1}}(h(r)))\rangle$ y $F \in C_c^\alpha(G,A)$ como $F(r) = \langle y|\gamma_r(xf(r^{-1})\alpha_{r^{-1}}(h(r)))\rangle$. La Ecuación 4.2.2 nos dice que $\langle\langle\langle x|_f y|h\rangle = \int_G F(r)\,dr$. Probemos ahora que $\int_G F(r)\,dr = \text{lím}_i \int_G F_i(r)\,dr$. Los soportes de todas las F_i y el de F están incluidos en el soporte de h. Luego

$$|\int_G F_i(r)\,dr - \int_G F(r)\,dr| \leq \int_G \|F_i(r) - F(r)\|\,dt \leq \mu(\text{sop}(h))\|F_i - F\|_\infty.$$

Para mostrar que $\text{lím}_i \int_G F_i\,dt = \int_G F\,dt$ basta mostrar que $\{F_i\}_i$ converge uniformemente a F. Para todo $r \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned}\|F_i(r) - F(r)\| &= \|\langle y|\gamma_r(x(e_i(r^{-1})f(r^{-1})\alpha_{r^{-1}}(h(r)) - f(r^{-1})\alpha_{r^{-1}}(h(r))))\rangle\| \\ &\leq \|y\|\|x\|\|e_i f\pi(h) - f\pi(h)\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Luego $\langle\langle\langle x|_f y|h\rangle = \text{lím}_i \int_G F_i(r)\,dr$ y

$$\begin{aligned}\langle\langle\langle x|_f y|h\rangle &= \lim_i \int_G F_i(r)\,dr = \lim_i \int_G \langle y|\gamma_r(xe_i(r^{-1})f(r^{-1})\alpha_{r^{-1}}(h(r)))\rangle\,dr \\ &= \lim_i \int_G \langle y|\gamma_r(xe_i(r^{-1}))\rangle\alpha_r(f(r^{-1}))h(r)\,dr \\ &= \lim_i \int_G \langle y|\gamma_r(xe_i(r^{-1}))\rangle\pi(f)h(r)\,dr \\ &= \lim_i \langle\,\langle\langle x|_{e_i} y|M_{\pi(f)}h\rangle = \langle g|M_{\pi(f)}h\rangle = \langle M_{\pi(f)^*}g|h\rangle.\end{aligned}$$

Como h es arbitrario se tiene que $M_{\pi(f)^*}g = \langle\langle x|_f y$.

Para terminar de mostrar que (a) implica (b) tomemos una unidad aproximada $\{f_j\}_{j\in J}$ con las características que aparecen en (b). Las conclusiones del párrafo anterior y los comentarios anteriores al enunciado de este Teorema implican que $\{\langle\langle x|_{f_j} y\}_{j\in J} = \{M_{\pi(f_j)^*}g\}_{j\in J}$ converge a $g = \text{lím}_i \langle\langle x|_{e_i} y$. □

Corolario 4.18. *$\mathcal{X}_{si}^\gamma$ es un subespacio de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Dados $x, y \in \mathcal{X}_{\text{si}}^\gamma$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathcal{X}$; para cualquier unidad aproximada $\{e_i\}_i$ como la dada en (a) del Lema anterior se cumple que $\{\langle\langle x + \lambda y|z\}_i = \{\langle\langle x|z + \lambda\langle\langle y|z\}_i$ es de Cauchy en $L^2_\alpha(G,A)$. Luego $x + \lambda y \in \mathcal{X}_{\text{si}}^\gamma$. □

Definición 4.19. Dado $x \in \mathcal{X}_{\text{si}}$ el operador $\langle\langle x|\colon \mathcal{X} \to L^2_\alpha(G,A),\ y \mapsto \langle\langle x|y$, se define como $\langle\langle x|y := \text{lím}_i \langle\langle x|_{e_i} y$, siendo $\{e_i\}_i$ una unidad aproximada como la del enunciado del Lema anterior.

El siguiente resultado fue probado, en el caso de las acciones globales, por Ralf Meyer.

Teorema 4.20. *Para cada $x \in \mathcal{X}_{si}$ el operador $\langle\langle x|$ es lineal y acotado.*

Demostración. Para probar que $\langle\langle x|$ es acotado basta mostrar que tiene gráfico cerrado. Supongamos que $\{y_n\}_n$ es una red en $\mathcal{X}$ que converge a 0 y que $\langle\langle x|y_n \to g \in L^2_\alpha(G,A)$. Luego para toda $h \in C^\alpha_c(G,A)$ se cumple que

$$\langle g|h\rangle = \lim_n \langle\langle\langle x|y_n|h\rangle = \lim_n \lim_i \langle\langle\langle x|_{e_i} y_n|h\rangle = \lim_n \lim_i \langle\langle\langle x|_{e_i} y_n|h\rangle. \tag{4.2.3}$$

Por otra parte

$$\langle\langle\langle x|_{e_i} y_n|h\rangle = \int_G \langle y_n|\gamma_t(xe_i(t^{-1}))\rangle h(t)\, dt = \int_G \langle y_n|\gamma_t(x[e_i\pi(h)](t^{-1}))\rangle\, dt. \tag{4.2.4}$$

Para cada i la función $t \mapsto \langle y_n|\gamma_t(x[e_i\pi(h)](t^{-1}))\rangle$ tiene soporte contenido en el soporte de h y, como $e_i\pi(h)$ converge uniformemente a $\pi(h)$, al tomar límite en i obtenemos que

$$\lim_i \langle\langle\langle x|_{e_i} y_n|h\rangle = \int_G \langle y_n|\gamma_t(x\pi(h)(t^{-1}))\rangle\, dt.$$

Luego

$$\|\lim_i \langle\langle\langle x|_{e_i} y_n|h\rangle\| \le \int_G \|y_n\|\|x\|\|\pi(h)(t^{-1})\|\, dt \le \|y_n\|\|x\| \int_G \|\pi(h)(t^{-1})\|\, dt$$

y esto implica que $\lim_n \lim_i \langle\langle\langle x|_{e_i} y_n|h\rangle = 0$. Al sustituir esto en la Ecuación 4.2.3 deducimos que $\langle g|h\rangle = 0$ para toda $h \in C^\alpha_c(G,A)$ y por lo tanto $\langle g|g\rangle = 0$, lo que nos dice que $g = 0$ y que $\langle\langle x|$ tiene gráfico cerrado. $\square$

De hecho puede mostrarse que $\langle\langle x|$ es adjuntable. Para ver cuál operador debería ser el adjunto observemos la Ecuación 4.2.4. De ella podemos deducir que para todo $f, g \in C^\alpha_c(G,A)$ y todo $x, y \in \mathcal{X}$ se cumple que

$$\langle\langle\langle x|_f y|g\rangle = \langle y| \int_G \gamma_t(x[f\pi(g)](t^{-1}))\, dt\rangle. \tag{4.2.5}$$

Si en la fórmula anterior f es un elemento de una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C^\alpha_c(G,A)$ y x es cuadrado integrable, entonces el lado izquierdo converge a $\langle\langle\langle x|y|g\rangle$ y el lado derecho converge a $\langle y| \int_G \gamma_t(x\pi(g)(t^{-1}))\, dt\rangle$ (ver los argumentos de la prueba del Teorema anterior). Luego, si es que $\langle\langle x|$ es adjuntable, entonces su adjunto queda determinado por la fórmula

$$\langle\langle x|^*(g) = \int_G \gamma_t(x\pi(g)(t^{-1}))\, dt,$$

ya que $C^\alpha_c(G,A)$ es denso en $L^2_\alpha(G,A)$.

Así como el Teorema anterior el que sigue se debe a R. Meyer (para acciones globales) y nos da una caracterización de los elementos cuadrado integrables que nos será extremadamente útil en los resultados que le siguen.

Teorema 4.21. *Para cada $x \in \mathcal{X}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) x es cuadrado integrable.

(b) La función $|x\rangle\rangle\colon C_c^\alpha(G,A) \to \mathcal{X},\ g \mapsto \int_G \gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(g(t)))\,dt$, es la restricción de un operador adjuntable de $L^2_\alpha(G,A)$ en $\mathcal{X}$.

Además, si x es cuadrado integrable entonces $\langle\langle x|\colon \mathcal{X} \to L^2_\alpha(G,A)$ es adjuntable y $\langle\langle x|^*$ es la extensión de $|x\rangle\rangle$.

Demostración. Supongamos que x es cuadrado integrable. Los argumentos que utilizamos antes del enunciado para establecer que $|x\rangle\rangle$ debe ser la restricción del adjunto de $\langle\langle x|$ (si es que este adjunto existe) implican que para todo $y \in \mathcal{X}$ y $g \in C_c^\alpha(G,A)$ se cumple que $\langle\langle\langle x|y|g\rangle = \langle y||x\rangle\rangle g\rangle$, independientemente de que $\langle\langle x|$ sea adjuntable o no.

Como $\langle\langle x|$ es continuo, para toda $g \in C_c^\alpha(G,A)$ se cumple que

$$\||x\rangle\rangle g\| = \sup\{\|\langle y||x\rangle\rangle g\rangle\|\colon \|y\| \leq 1\} = \sup\{\|\langle\langle\langle x|y|g\rangle\|\colon \|y\| \leq 1\} \leq \|\langle\langle x|\|\|g\|.$$

La desigualdad previa muestra que $|x\rangle\rangle$ es acotado y por lo tanto tiene una única extensión a un operador continuo y lineal de $L^2_\alpha(G,A)$ en $\mathcal{X}$, operador que llamaremos $|x\rangle\rangle$.

Por continuidad la igualdad $\langle\langle\langle x|y|g\rangle = \langle y||x\rangle\rangle f\rangle$, válida para todo $y \in \mathcal{X}$ y $g \in C_c^\alpha(G,A)$, puede extenderse a todo $g \in L^2_\alpha(G,A)$, lo que nos dice que $\langle\langle x|$ es adjuntable y que $\langle\langle x|^*$ extiende a $|x\rangle\rangle$.

Recíprocamente, asumamos que $|x\rangle\rangle$ se extiende a un operador adjuntable. De igual manera que dedujimos la Ecuación 4.2.5 (ver también la Ecuación 4.2.4) podemos mostrar que para todo $y \in \mathcal{X}$ y todo $f, g \in C_c^\alpha(G,A)$ se cumple que

$$\langle\langle\langle x|_f y|g\rangle = \langle y||x\rangle\rangle(M_{\pi^{-1}(f)}g)\rangle.$$

Tomemos una unidad aproximada de $C_0^\alpha(G,A)$ contenida en $C_c^\alpha(G,A)$, $\{e_i\}_i$. Para todo i y toda $g \in C_c^\alpha(G,A)$ se cumple que

$$\langle\langle\langle x|_{e_i} y|g\rangle = \langle M_{\pi^{-1}(e_i^*)}|x\rangle\rangle^* y|g\rangle,$$

lo que nos dice que $\langle\langle x|_{e_i} y = M_{\pi^{-1}(e_i^*)} |x\rangle\rangle^* y$, para todo i. Además $\lim_i M_{\pi^{-1}(e_i^*)} |x\rangle\rangle^* y = |x\rangle\rangle^* y$, lo que implica que x es cuadrado integrable. De lo anterior deducimos que $\langle\langle x|$ es adjuntable y $\langle\langle x|^* = |x\rangle\rangle$. $\square$

Corolario 4.22. *Si $\phi\colon \gamma \to \delta$ es un isomorfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert, siendo γ una acción de G en $\mathcal{X}_A$ y δ una de G en $\mathcal{Y}_B$, se cumple que $\phi(\mathcal{X}_{si}) = \mathcal{Y}_{si}$. En particular γ es cuadrado integrable si y solamente si δ lo es.*

Demostración. Basta mostrar que $\phi(\mathcal{X}_{\mathrm{si}}) \subset \mathcal{Y}_{\mathrm{si}}$. Definamos $\alpha := \gamma^r$ y $\beta := \delta^r$. Sabemos que $\phi^r\colon \alpha \to \beta$ es un isomorfismo de acciones parciales; luego $\rho\colon C_0^\alpha(G, A) \to C_0^\beta(G, B)$, $\rho(f)(t) = \phi^r(f(t))$, es un isomorfismo de C*-álgebras de manera que $\rho(C_c^\alpha(G, A)) = C_c^\beta(G, B)$. Además existe un único isomorfismo de módulos de Hilbert $U\colon L^2_\beta(G, B) \to L^2_\alpha(G, A)$ tal que $U(f) = \rho(f)$ y $U^r = \phi^r$. Veremos que para cada $x \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ el operador $\phi \circ |x\rangle\rangle \circ U^{-1}\colon L^2_\beta(G, B) \to \mathcal{Y}$ es adjuntable y extiende a $|\phi(x)\rangle\rangle$.

Dada $f \in C_c^\beta(G, B)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\phi \circ |x\rangle\rangle \circ U^{-1}(f) &= \phi\Big(\int_G \gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(\phi^{-1^r}(f(t))))\Big)\, dt = \int_G \delta_t(\phi(x)\beta_{t^{-1}}(f(t)))\, dt \\ &= |\phi(x)\rangle\rangle(f),\end{aligned}$$

lo que muestra que $\phi \circ |x\rangle\rangle \circ U^{-1}$ es una extensión de $|\phi(x)\rangle\rangle$. Para terminar la prueba basta mostrar que $U \circ \langle\langle x| \circ \phi^{-1}$ es el adjunto de $\phi \circ |x\rangle\rangle \circ U^{-1}$. En efecto, para $f \in C_c^\beta(G, B)$ e $y \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned}\langle \phi \circ |x\rangle\rangle \circ U^{-1}(f)|y\rangle &= \phi^r(\langle |x\rangle\rangle \circ U^{-1}(f)|\phi^{-1^r}(y)\rangle) = \phi^r(\langle U^{-1}(f)|\langle\langle x| \circ \phi^{-1^r}(y)\rangle) \\ &= \langle f|U \circ \langle\langle x| \circ \phi^{-1^r}(y)\rangle.\end{aligned}$$

Por continuidad la igualdad se extiende a toda $f \in L^2_\beta(G, B)$. $\square$

Corolario 4.23. *Para las acciones globales la Definición 4.16 coincide con la Definición de Meyer [Mey01].*

Demostración. Cuando α es global $L^2_\alpha(G, A) = L^2(G, A)$, $C_c^\alpha(G, A) = C_c(G, A)$ y para cada $x \in \mathcal{X}$ el operador $|x\rangle\rangle\colon C_c(G, A) \to \mathcal{X}$ está dado por

$$|x\rangle\rangle(f) = \int_G \gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(f(t)))\, dt = \int_G \gamma_t(x)f(t)\, dt,$$

lo que muestra que nuestra función $|x\rangle\rangle$ coincide con la definida por Meyer. El resto se deduce del Teorema anterior y de los comentarios al inicio de la Sección 4 de [Mey01]. $\square$

Adicionalmente probaremos que los operadores $\langle\langle x|$ son $\gamma-\delta-$equivariantes, donde δ es la acción parcial definida por α en $L^2_\alpha(G,A)$ que describimos en el Ejemplo 1.6.

Teorema 4.24. *Si x es cuadrado integrable entonces $\langle\langle x| \in \mathbb{B}(\gamma,\delta)$.*

Demostración. Ya sabemos que $\langle\langle x|$ es adjuntable y, puesto que $\gamma^r = \alpha = \delta^r$, nos basta con mostrar que $|x\rangle\rangle \in \mathbb{B}(\delta,\gamma)$. A su vez nos será suficiente mostrar que para todo $t\in G$ y $f\in C_c^\alpha(G,A)_{t^{-1}}$ se cumple que $\gamma_t(|x\rangle\rangle f) = |x\rangle\rangle(\delta_t(f))$.

Como veremos más adelante, para calcular $|x\rangle\rangle(\delta_t(f))$ debemos integrar (respecto de s) el factor $\gamma_s\left(x\alpha_{st^{-1}}(f(t^{-1}s))\right)$. La clave es observar que $x\alpha_{st^{-1}}(f(t^{-1}s)) \in \mathcal{X}_{st^{-1}}\cap\mathcal{X}_s$ y por lo tanto que $\gamma_s\left(x\alpha_{st^{-1}}(f(t^{-1}s))\right) = \gamma_t\gamma_{t^{-1}s}\left(x\alpha_{st^{-1}}(f(t^{-1}s))\right)$. Luego

$$\begin{aligned}
|x\rangle\rangle(\delta_t(f)) &= \int_G \gamma_s\left(x\alpha_{t^{-1}}(\delta_t(f)(s))\right) ds = \int_G \gamma_s\left(x\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(f(t^{-1}s)))\right) ds\\
&= \int_G \gamma_s\left(x\alpha_{st^{-1}}(f(t^{-1}s))\right) ds = \int_G \gamma_t\gamma_{t^{-1}s}\left(x\alpha_{st^{-1}}(f(t^{-1}s))\right) ds\\
&= \int_G \gamma_t\gamma_s\left(x\alpha_s(f(s))\right) ds = \gamma_t\left(\int_G \gamma_s\left(x\alpha_s(f(s))\right) ds\right)\\
&= \gamma_t\left(|x\rangle\rangle f\right).
\end{aligned}$$

□

Además de ser un subespacio, $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es un submódulo en el sentido de que $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}A\subset\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$. Este hecho está relacionado con la representación regular de $\mathcal{B}\alpha$, que puede pensarse como una representación de $\mathcal{B}\alpha$ en $L^2_\alpha(G,A)$ ya que $L^2_\alpha(G,A)$ es isomorfo a $L^2(\mathcal{B}\alpha)$ (Lema 2.13).

Traslademos la representación regular de $\mathcal{B}\alpha$ a una representación de $\mathcal{B}\alpha$ en $\mathbb{B}(L^2_\alpha(G,A))$ utilizando el unitario U construido en el Lema 2.13. De hecho utilizaremos U^*, que queda determinado por $U^*(f)(s) = \Delta(s)^{-1/2}\alpha_s(f(s^{-1}))\delta_s$. Tomemos $a\delta_t\in\mathcal{B}\alpha$, $f\in C_c^\alpha(G,A)$ y $r\in G$. Luego

$$\begin{aligned}
\Lambda_{a\delta_t}\circ U^*(f)(r) &= a\delta_t U^*(f)(t^{-1}r) = a\delta_t\Delta(t^{-1}r)^{-1/2}\alpha_{t^{-1}r}(f(r^{-1}t))\delta_{t^{-1}r}\\
&= \Delta(t^{-1}r)^{-1/2}\alpha_t\left(\alpha_{t^{-1}}(a)\alpha_{t^{-1}r}(f(r^{-1}t))\right)\delta_r\\
&= \Delta(t)^{1/2}\Delta(r)^{-1/2}\alpha_r\alpha_{r^{-1}t}\left(\alpha_{t^{-1}}(a)\alpha_{t^{-1}r}(f(r^{-1}t))\right)\delta_r;
\end{aligned}$$

lo que junto con la expresión para calcular U^* implica que

$$U\circ\Lambda_{a\delta_t}\circ U^*(f)(r) = \Delta(t)^{1/2}\alpha_{rt}\left(\alpha_{t^{-1}}(a)\alpha_{t^{-1}r^{-1}}(f(rt))\right). \tag{4.2.6}$$

La función $\Phi\colon \mathcal{B}\alpha \to \mathbb{B}(L^2_\alpha(G,A))$, $b \mapsto U \circ \Lambda_b \circ U^*$, es la *representación regular* de $\mathcal{B}\alpha$ en $L^2_\alpha(G,A)$ y su forma integrada, $\widetilde{\Phi} = U \circ \widetilde{\Lambda} \circ U^*$, es la representación regular de $C^*(\mathcal{B}\alpha)$ en $L^2_\alpha(G,A)$. Por construcción $\widetilde{\Phi}$ es unitariamente equivalente (a través de U) a la representación regular de $C^*(\mathcal{B}\alpha)$, por lo que $\widetilde{\Phi}(C^*(\mathcal{B}\alpha))$ es isomorfo a $C^*_r(\mathcal{B}\alpha)$ y el núcleo de $\widetilde{\Phi}$ coincide con el de la representación regular de $C^*(\mathcal{B}\alpha)$.

Teorema 4.25. *Para cada $x \in \mathcal{X}_{si}$, $t \in G$ y $a \in A_{t^{-1}}$ se cumple que $\gamma_t(xa) \in \mathcal{X}_{si}$. Además $|\gamma_t(xa)\rangle\rangle = \Delta(t)^{-1/2}|x\rangle\rangle \circ \Phi_{a\delta_{t^{-1}}}$.*

Demostración. El operador $\Delta(t)^{-1/2}|x\rangle\rangle \circ \Phi_{a\delta_{t^{-1}}}$ es adjuntable y por lo tanto la tesis quedará demostrada una vez que probemos que su restricción a $C^\alpha_c(G,A)$ es $|\gamma_t(xa)\rangle\rangle$. En los cálculos siguientes $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de A_t y $f \in C^\alpha_c(G,A)$.

$$\begin{aligned}
\Delta(t)^{-1/2}|x\rangle\rangle \circ \Phi_{a\delta_{t^{-1}}}(f) &= \Delta(t)^{-1}\int_G \gamma_s\left(x\alpha_{s^{-1}}\left(\alpha_{st^{-1}}\left(\alpha_t(a)\alpha_{ts^{-1}}(f(st^{-1}))\right)\right)\right) ds \\
&= \Delta(t)^{-1}\int_G \gamma_s\left(x\alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_t(a)\alpha_{ts^{-1}}(f(st^{-1}))\right)\right) ds \\
&= \Delta(t)^{-1}\int_G \gamma_{st^{-1}}\gamma_t\left(x\alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_t(a)\alpha_{ts^{-1}}(f(st^{-1}))\right)\right) ds \\
&= \int_G \gamma_s\gamma_t\left(x\alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_t(a)\alpha_{s^{-1}}(f(s))\right)\right) ds \\
&= \int_G \lim_i \gamma_s\gamma_t\left(x\alpha_{t^{-1}}\left(\alpha_t(a)e_i\alpha_{s^{-1}}(f(s))\right)\right) ds \\
&= \int_G \lim_i \gamma_s\left(\gamma_t(xa)e_i\alpha_{s^{-1}}(f(s))\right) ds \\
&= \int_G \gamma_s\left(\gamma_t(xa)\alpha_{s^{-1}}(f(s))\right) ds \\
&= |\gamma_t(xa)\rangle\rangle(f).
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.26. *Si definimos $\mathcal{X} \times C^\alpha_c(G,A) \to \mathcal{X}$, $(x,f) \mapsto x * f$, siendo*

$$x * f := \int_G \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(xf(t^{-1}))\,dt,$$

entonces para todo $x \in \mathcal{X}_{si}$ y $f \in C^\alpha_c(G,A)$ se cumple que $x * f \in \mathcal{X}_{si}$ y

$$|x * f\rangle\rangle = |x\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(f\delta).$$

Demostración. Basta con mostrar que $|x\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(f)$ extiende a $|x * f\rangle\rangle\colon C^\alpha_c(G,A) \to \mathcal{X}$. Fijemos $g \in C^\alpha_c(G,A)$. Luego

$$\begin{aligned}
|x\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(f)(g) = |x\rangle\rangle \left(\int_G \Phi_{f(t)\delta_t}(g)\, dt \right) &= \int_G |x\rangle\rangle \circ \Phi_{f(t)\delta_t}(g)\, dt \\
&= \int_G \Delta(t)^{-1/2} \Delta(t)^{1/2} |x\rangle\rangle \circ \Phi_{f(t)\delta_t}(g)\, dt \\
&= \int_G \Delta(t)^{-1/2} |\gamma_{t^{-1}}(xf(t))\rangle\rangle(g)\, dt \\
&= \int_G \int_G \Delta(t)^{-1/2} \gamma_s \left(\gamma_{t^{-1}}(xf(t)) \alpha_{s^{-1}}(g(s)) \right) dsdt \\
&= \int_G \gamma_s \left(\int_G \Delta(t)^{-1/2} \gamma_{t^{-1}}(xf(t))\, dt \alpha_{s^{-1}}(g(s)) \right) ds \\
&= \int_G \gamma_s \left(\int_G \Delta(t)^{-1/2} \gamma_t(xf(t^{-1}))\, dt \alpha_{s^{-1}}(g(s)) \right) ds \\
&= |x * f\rangle\rangle(g).
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 4.27. *$\mathcal{X}_{si}$ es un submódulo de $\mathcal{X}$ en el sentido de que $\mathcal{X}_{si} A \subset \mathcal{X}_{si}$.*

Demostración. Del Teorema anterior se deduce directamente que para todo $a \in A = A_e$ el elemento $xa = \gamma_e(xa)$ es cuadrado integrable si x lo es. $\square$

Corolario 4.28. *Si $\gamma^r = \delta^r$ y $T \in \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ entonces $T(\mathcal{X}_{si}) \subset \mathcal{Y}_{si}$. Además para cada $x \in \mathcal{X}_{si}$ se cumple que $|T(x)\rangle\rangle = T \circ |x\rangle\rangle$.*

Demostración. Digamos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son $A-$módulos plenos y que $\alpha := \gamma^r = \delta^r$. Luego para cada $x \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ y $f \in C_c^\alpha(G, A)$ se cumple que

$$|Tx\rangle\rangle = \int_G \delta_t(Tx\alpha_{t^{-1}}(f(t)))\, dt = \int_G T(\delta_t(x\alpha_{t^{-1}}(f(t))))\, dt = T \circ |x\rangle\rangle(f),$$

por lo que $|Tx\rangle\rangle$ es la restricción del operador adjuntable $T \circ |x\rangle\rangle$. $\square$

Ya que nuestra definición de elementos cuadrado integrables coincide con la de Meyer [Mey01] nos preguntamos si $L^2_\alpha(G, A)$ es cuadrado integrable con su acción canónica.

Recordemos que hemos identificado $C_c^\alpha(G, A)$ con $C_c(\mathcal{B}\alpha)$, lo que nos da una topología del límite inductivo en $C_c^\alpha(G, A)$. Para describir directamente esta topología definamos, para cada compacto $K \subset G$, $C_K^\alpha(G, A) := C_c^\alpha(G, A) \cap C_K(G, A)$. Luego cada $C_K^\alpha(G, A)$ es un espacio de Banach con la norma del supremo. La topología del límite inductivo en $C_c^\alpha(G, A)$ es la mayor topología localmente convexa con la cual todas las inclusiones $\iota_K \colon C_K^\alpha(G, A) \to C_c^\alpha(G, A)$ son continuas (considerando en el dominio la norma del supremo). De hecho esta descripción implica que la topología del límite inductivo de $C_c^\alpha(G,A)$ es la restricción de la topología del límite inductivo de $C_c(G,A)$.

Teorema 4.29. *Para cualquier acción parcial en C*-álgebras, digamos α de G en A, se cumple que $C_c^\alpha(G,A)\subset L^2_\alpha(G,A)_{si}$, considerando en $L^2_\alpha(G,A)$ la acción δ definida por α (Ejemplo 1.6). Por lo tanto δ es cuadrado integrable.*

Demostración. Tomemos $f\in C_c^\alpha(G,A)$ y veamos que $|f\rangle\rangle\colon C_c^\alpha(G,A)\to L^2_\alpha(G,A)$ tiene una extensión a un operador adjuntable. Para cada $g\in C_c^\alpha(G,A)$

$$|f\rangle\rangle(g)=\int_G \delta_t(f\alpha_{t^{-1}}(g(t)))\,dt.$$

Para cada $t\in G$ el soporte de $\delta_t(f\alpha_{t^{-1}}(g(t)))\in C_c^\alpha(G,A)$ está contenido en $t\mathrm{sop}(f)$. Además $F\colon G\to C_c^\alpha(G,A),\ F(t):=\delta_t(f\alpha_{t^{-1}}(g(t)))$, es continua con respecto a la norma del supremo, tiene soporte compacto y su imagen está contenida en $C^\alpha_{\mathrm{sop}(g)\mathrm{sop}(f)}(G,A)$. Por lo tanto F es continua con respecto a la topología del límite inductivo. Esa topología contiene a la topología relativa a $L^2_\alpha(G,A)$ ya que para cada compacto $K\subset G$ y $a\in C_K^\alpha(G,A)$

$$\|a\|_{L^2_\alpha(G,A)}=\|\int_G a(t)^*a(t)\,dt\|^{1/2}\le\left(\int_G\|a(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}\le\mu(K)^{1/2}\|a\|_\infty.$$

Luego, si $\kappa\colon C_c^\alpha(G,A)\to L^2_\alpha(G,A)$ es la inclusión canónica entonces,

$$\kappa\left(\int_G F(t)\,dt\right)=\int_G\kappa\left(F(t)\right)\,dt=|f\rangle\rangle(g),$$

lo que nos dice que $|f\rangle\rangle(g)\in C_c^\alpha(G,A)$ y que podemos pensar $|f\rangle\rangle(g)=\int_G F(t)\,dt$.

Como la evaluación $\mathrm{ev}_r\colon C_0^\alpha(G,A)\to G,\ h\mapsto h(r)$, es continua con respecto a la topología del límite inductivo: $|f\rangle\rangle(g)(r)=\int_G F(t)(r)\,dt=\int_G\alpha_t(f(t^{-1}r)\alpha_{t^{-1}}(g(t)))\,dt$.

Definamos $\widehat{f}\in C_c(\mathcal{B}\alpha)$ como $\widehat{f}(t):=\Delta(t)^{-1/2}\alpha_t(f(t^{-1}))\delta_t$. De las ecuaciones de arriba y la Ecuación 4.2.6 deducimos que

$$\begin{aligned}|f\rangle\rangle(g)(r)&=\int_G\alpha_{rt}(f(t^{-1})\alpha_{t^{-1}r^{-1}}(g(rt)))\,dt\\&=\int_G\Delta(t)^{1/2}\alpha_{rt}(\alpha_{t^{-1}}[\Delta(t)^{-1/2}\alpha_t(f(t^{-1}))]\alpha_{t^{-1}r^{-1}}(g(rt)))\,dt\\&=\int_G\Phi_{\widehat{f}(t)}(g)(r)\,dt=\widetilde{\Phi}(\widehat{f})(g)(r).\end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que $|f\rangle\rangle$ es la restricción de $\widetilde{\Phi}(\widehat{f})$, por lo tanto $|f\rangle\rangle$ es la restricción de un operador adjuntable. $\square$

Como sucede en gran parte de la literatura nuestro banco de pruebas son las álgebras conmutativas. Ya que hemos desarrollado suficiente maquinaria para trabajar con las acciones cuadrado integrables es hora de ver qué podemos hacer con ellas en nuestros casos de prueba.

4.3. Estudio de caso: Álgebras conmutativas

En las páginas siguientes caracterizaremos los elementos cuadrado integrables de las acciones parciales en álgebras conmutativas y mostraremos que las acciones parciales propias (en espacios HLC) son exactamente aquellas que provienen de una acción parcial cuadrado integrable. Eso último es conocido para las acciones globales y fue probado por Rieffel en [Rie04].

Fijemos una acción parcial HLC σ de G en X, llamemos A a $C_0(X)$ y α a la acción parcial en C*-álgebras de G en A definida por σ.

Por un lado sabemos que $L^2(G, C_0(X))$ es un $C_0(X)-$módulo de Hilbert pleno. Por otro lado es posible equipar a $Z := C_0(X, L^2(G))$ con una estructura de $C_0(X)-$módulo de Hilbert pleno con las operaciones $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$ y $fa(x) = f(x)a(x)$. Este nuevo $C_0(X)-$módulo de Hilbert también es pleno. En efecto, sabemos que $\overline{\operatorname{span}}\,\langle Z, Z\rangle$ es un $*-$ideal de $C_0(X)$ y por lo tanto es una C*-subálgebra. Para ver que es densa basta mostrar que separa puntos y no se anula. Tomemos $x, y \in X$ distintos. Sean $g \in C_c(G)$ y $a \in C_c(X)$ tales que $\langle g, g\rangle = 1$, $a(x) = 1$ y $a(y) = 0$. Definamos $f : X \to L^2(G)$ como $f(x)(t) = a(x)g(t)$. Es evidente que $\langle f, f\rangle(x) = 1$ y que $\langle f, f\rangle(y) = 0$. Esto muestra, a la vez, que $\operatorname{span}\langle Z, Z\rangle$ separa puntos y no se anula.

Lema 4.30. *Existe un único unitario* $U : L^2(G, C_0(X)) \to C_0(X, L^2(G))$ *de manera que para cada* $f \in C_c(G, C_0(X))$ *se cumple que* $Uf(x)(t) = f(t)(x)$.

Demostración. Pensemos $C_0(X) \odot C_c(G) \subset C_0(X, L^2(G))$ y

$$C_c(G) \odot C_0(X) \subset C_c(G, C_0(X)) \subset L^2(G, C_0(X)) = L^2(G) \otimes C_0(X),$$

donde $\odot$ es el producto tensorial de espacios vectoriales y $\otimes$ el producto tensorial con respecto al homomorfismo $\mathbb{C} \to M(C_0(X))$, $\lambda \mapsto \lambda 1$ (pensando a $L^2(G)$ como un $\mathbb{C}-$módulo de Hilbert).

Sea $U : C_c(G) \odot C_0(X) \to C_0(X) \odot C_c(G)$ la única función lineal tal que $U(a \odot b) = b \odot a$. Esta función es una isometría porque para todo $x \in X$, $a, a' \in C_c(G)$ y $b, b' \in C_0(X)$

$$\langle a \odot b, a' \odot b'\rangle|_x = \int_G \overline{a(t)}a'(t)\,dt\overline{b(x)}b'(x) = \int_G \overline{a(t)b(x)}a'(t)b'(x)\,dt = \langle b \odot a, b' \odot a'\rangle|_x.$$

De hecho las igualdades anteriores implican que U preserva el producto interno. Como $C_c(G) \odot C_0(X)$ es denso en $L^2(G, C_0(X))$ y $C_0(X) \odot C_c(G)$ lo es en $C_0(X, L^2(G))$, U admite una única extensión a un unitario de $L^2(G, C_0(X))$ en $C_0(X, L^2(G))$, que también llamaremos U.

Notemos que si $a\odot \in C_0(X)\odot C_c(G)$, $x \in X$ y $t \in G$ entonces $U(a\odot b)(x)(t) = a(x)b(t) = (a \odot b)(t)(x)$. Esto implica la unicidad de la función de la tesis, lo que debemos hacer es probar la condición de la tesis.

Sea $f \in C_c(G, C_0(X))$. Usando el Lema de Uryshon puede encontrarse un compacto $K \subset G$ y una sucesión $\{f_n\}_n \subset C_K(G) \otimes C_0(X)$ que converge uniformemente a f. Esa sucesión también converge en la topología del límite inductivo de $C_c(G, C_0(X))$, la cual contiene a la topología relativa a $L^2(G, C_0(X))$. Entonces $\{Uf_n\}_n$ converge a Uf en $C_0(X, L^2(G))$. La convergencia en ese espacio implica la convergencia puntual, así que para todo $x \in X$ $\{Uf_n(x)\}_n$ converge en $L^2(G)$ a $Uf(x)$. Notemos que $\|Uf_n(x)(\cdot) - f(\cdot)(x)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0$ y que $\{Uf_n(x)\}_n \subset C_K(G)$. Luego $\{Uf_n(x)\}_n$ converge en $L^2(G)$ a $t \mapsto f(t)(x)$, de lo que se deduce que $Uf(x)(\cdot) = f(\cdot)(x)$ en casi todo punto. $\square$

Para determinar los elementos cuadrado integrables de $C_0(X)$ nos será útil el siguiente Lema, que no es nada novedoso.

Lema 4.31. *Para toda función $f\colon G \to [0, +\infty)$ para la cual existe un abierto U de manera que f es continua en U y se anula fuera de U, las siguientes condiciones son equivalentes*

1. $I := \{\int_G fg\, dt\colon g \in C_c(U)^+,\ 0 \leq g \leq 1\}$ *está acotado superiormente.*
2. $J := \{\int_K f\, dt\colon K$ *es un compacto de* $U\}$ *está acotado superiormente.*
3. f *es integrable.*

Además si f es integrable entonces $\int_G f\, dt = \sup I = \sup J$.

Demostración. Llamemos $C_c(U)^+_1$ al subconjunto de $C_c(U)$ formado por las funciones con imagen contenida en $[0, 1]$. Para mostrar que (1) implica (2) tomemos un compacto $K \subset U$. Luego existe $g \in C_c(U)^+_1$ constante e igual a 1 en K. Por lo tanto $\int_K f\, dt \leq \int_G fg\, dt \leq \sup I$. Esto nos dice que J está acotado superiormente y que $\sup J \leq \sup I$.

Recíprocamente, dada $g \in C_c(U)^+_1$ se tiene $K := \mathrm{sop}(g)$ está contenido en U. Luego $\int_G fg\, dt \leq \int_K f\, dt \leq \sup J$. De donde deducimos que I está acotado superiormente y que $\sup I \leq \sup J$.

Veamos que (3) implica (2). Dado un conjunto V denotaremos $\mathbb{I}_V$ a la función indicador[5] de V. Si K es un compacto de U entonces $\int_K f\,dt = \int_G f\mathbb{I}_K\,dt \leq \int_G f\,dt$. Luego J está acotado superiormente y $\sup J \leq \int_G f\,dt$.

Veamos ahora que (2) implica (3). Recordemos que una función $h\colon G \to \mathbb{R}$ se dice simple si existen conjuntos disjuntos, medibles y de medida finita $U_1, \ldots, U_n \subset G$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $h = \sum_j \lambda_j \mathbb{I}_{U_j}$. Recordemos también que f es integrable si y solamente si $S_f := \{\int_G h\,dt\colon h \text{ es simple y } h \leq f\}$ está acotado superiormente, en tal caso $\int_G f\,dt = \sup S_f$. Habremos completado la prueba si logramos mostrar que para toda función simple $h\colon G \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq h \leq f$ y todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $\int_G h\,dt \leq \sup J + \varepsilon$.

Supongamos que $h = \sum_j \lambda_j \mathbb{I}_{U_j}$ es simple y $0 \leq h \leq f$. Podemos asumir que todos los λ_j son positivos, con lo cual $U_1 \cup \ldots \cup U_n \subset U$. Como cada U_j es medible y de medida finita, para cada j existe un compacto $K_j \subset U_j$ tal que $\mu(U_j \backslash K_j) < \varepsilon(nM)^{-1}$, siendo $M = 1 + \sum_j |\lambda_j|$. Llamemos K a la unión de los K_j y $h' := \sum_j \lambda_j \mathbb{I}_{K_j}$.

Por un lado tenemos que $|\int_G h\,dt - \int_G h'\,dt| \leq \sum_j |\lambda_j| \mu(U_j \backslash K_j) < \varepsilon$. Por otro lado, para cada j, $\lambda_j \mathbb{I}_{K_j} \leq \lambda_j \mathbb{I}_{U_j} \leq f\mathbb{I}_{U_j} \leq f$. De donde deducimos que $\lambda_j \mathbb{I}_{K_j} \leq f\mathbb{I}_{K_j}$. Luego

$$\int_G h'\,dt \leq \sum_j \int_G f\mathbb{I}_{K_j}\,dt = \int_G f(\sum_j \mathbb{I}_{K_j})\,dt = \int_K f\,dt \leq \sup J,$$

donde las dos igualdades se deben a que los K_j son disjuntos. De lo anterior deducimos que $\int_G h\,dt \leq \int_G h'\,dt + \varepsilon \leq \sup J + \varepsilon$. $\square$

En las álgebras conmutativas, pensadas como módulos sobre sí mismas, es posible determinar exactamente los elementos cuadrado integrables.

Teorema 4.32. *Supongamos que σ es una acción parcial HLC de G en X, que α es la acción parcial en $A := C_0(X)$ definida por σ y que $a \in A$. Si definimos*

$$F_a\colon X \to L_\infty(G),\ \ F_a(x)(t) = \begin{cases} a(\sigma_{t^{-1}}(x)) \ \textit{si}\ x \in X_t \\ 0 \ \textit{si}\ x \notin X_t \end{cases},$$

entonces a es cuadrado integrable si y solamente si (i) para todo $x \in X : F_a(x) \in L^2(G)$ y (ii) F_a es continua y acotada como función de X en $L^2(G)$. Además si a es cuadrado integrable entonces $\langle\langle a| = \sup_{x\in X} \|F_a(x)\|_2$.

Demostración. Supongamos que $a, b \in A$ y tomemos una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C_0^\alpha(G, A)$ contenida en $C_c^\alpha(G, A)$. Ya que el operador U de la tesis del Lema 4.30 es

[5] Vale 1 en V y 0 fuera de V.

una isometría, la red $\{\langle\langle a|_{e_i}b\}_i$ será una red de Cauchy en $L^2(G,A)$ si y solamente si $\{U\langle\langle a|_{e_i}b\}_i$ es una red de Cauchy en $C_0(X,L^2(G))$.

Llamemos Γ al abierto $\{(t,x)\in G\times X\colon x\in X_t\}$ y pensamos a $C_c(\Gamma)$ como un $*-$ideal denso de $C_0^\alpha(G,A)$. Para construir una unidad aproximada de $C_0^\alpha(G,A)$ contenida en $C_c(\Gamma)$ tomemos como conjunto dirigido, Λ, a los elementos positivos de $C_c(\Gamma)$ de norma menor o igual a 1, ordenado con el orden usual. Evidentemente $\{\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una unidad aproximada de $C_0^\alpha(G,A)$ contenida en $C_c^\alpha(G,A)$. Por conveniencia definimos, para cada $\lambda\in\Lambda$, $\lambda'(s,x):=\lambda(s^{-1},\sigma_{s^{-1}}(x))$. La red $\{\lambda'\}_{\lambda\in\Lambda}$ también es una unidad aproximada pues $\Gamma\to\Gamma,\ (s,x)\mapsto(s^{-1},\sigma_{s^{-1}}(x))$, es un homeomorfismo.

Necesitamos tener una fórmula para $\langle\langle a|_{\lambda'}b$ que nos permita calcular $U\langle\langle a|_{\lambda'}b$. Si $s\in G$ y $x\in X_s$ entonces con la notación del Lema 4.12

$$\begin{aligned}\langle\langle a|_{\lambda'}b(s)(x)&=\langle\alpha_s(a\lambda'(s^{-1}))|b\rangle(x)=\overline{a(\sigma_{s^{-1}}(x))}\lambda'(s^{-1},\sigma_{s^{-1}}(x))b(x)\\&=\overline{F_a(x)(s)}b(x)\lambda(s,x).\end{aligned}$$

Luego $U\langle\langle a|_{\lambda'}b(x)(s)=\overline{F_a(x)(s)}\lambda(s,x)b(x)$ para todo $x\in X$ y $s\in G$.

Asumamos que a es cuadrado integrable y probemos que para cada $x_0\in X$ se tiene $F_a(x_0)\in L^2(G)$ y que $F_a\colon X\to L^2(G)$ es continua. Sabemos que existe una función $b\in C_c(X)$ constante e igual a 1 en un entorno V de x_0. Para cada $x\in V$ y $s\in G$ tenemos que $\langle\langle a|_{\lambda'}b(s)(x)=\overline{F_a(x)(s)}\lambda(s,x)$. Por otra parte $\{U\langle\langle a|_{\lambda'}b\}_\lambda$ converge en $C_0(X,L^2(G))$ y, por lo tanto, para cada $x\in V$ la red $\{U\langle\langle a|_{\lambda'}b(x)\}_\lambda$ converge en $L^2(G)$. Es evidente entonces que $\{\|U\langle\langle a|_{\lambda'}b(x)\|_2^2\}_\lambda$ es convergente. Para cada $x\in V$

$$I_\lambda(x):=\int_G|F_a(x)(s)|^2\lambda(s,x)^2\,ds=\|U\langle\langle a|_{\lambda'}b(x)\|_2^2,\tag{4.3.1}$$

de lo que deducimos, inmediatamente, que $\{I_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es creciente y por lo tanto acotada superiormente. Por definición $|F_a(x)(\cdot)|^2$ se anula fuera del abierto $G^x=\{t\in G\colon x\in X_t\}$ y es evidente que $|F_a(x)(\cdot)|^2$ es continua en G^x. Para mostrar que $|F_a(x)(\cdot)|^2$ es integrable apelaremos al Lema anterior. Dado un compacto $K\subset G^x$ el conjunto $K\times\{x\}\subset\Gamma$ es compacto. Luego existe $\lambda_0\in\Lambda$ constante e igual a 1 en K. Es evidente entonces que $\int_K|F_a(x)(s)|^2\,ds\le I_{\lambda_0}(x)\le\sup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda(x)$. Esto implica que $F_a(x)\in L^2(G)$. De esto último y de la Ecuación 4.3.1 deducimos que $\|F_a(x)\|_2^2=\lim_\lambda I_\lambda(x)=\sup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda(x)$. Luego $\{U\langle\langle a|_{\lambda'}b(x)\}_\lambda$ converge a $F_a(x)$ en $L^2(G)$ pues

$$\|F_a(x)-U\langle\langle a|_{\lambda'}b(x)\|_2^2=\int_G|F_a(x)|^2(1-\lambda(s,x)^2)\,ds=\|F_a(x)\|_2^2-I_{\lambda^2}(x)\to 0.$$

Hemos mostrado que en V F_a coincide con $U\langle\langle a|b$; luego la primera es continua en V pues la segunda lo es. Pero V era un entorno de un punto arbitrario x_0, luego $F_a\colon X\to L^2(G)$

es continua. Veamos ahora que es acotada.

Definamos $T_a\colon C_0(X) \to C(X, L^2(G))$, $b \mapsto T_a(b)$, donde $T_a(b)(x) = b(x)\overline{F_a(x)}$. Observemos que $T_a = U \circ \langle\langle a|$ pues para cada $b \in C_0(X)$ se tiene $U\langle\langle a|_{\lambda'} b(x)(s) = \overline{F_a(x)(s)}\lambda(s,x)b(x)$ y $\{\overline{F_a(x)(s)}\lambda(s,x)\}_\lambda$ converge en $L^2(G)$ a $\overline{F_a(x)(s)}$. Luego T_a es acotado y $\|T_a\| = \|\langle\langle a|\|$. Puede mostrarse sin dificultad que T_a es acotado si y solamente si F_a está acotada y que en ese caso $\|T_a\| = \sup\{\|F_a(x)\|_2 \colon x \in X\}$. Esto prueba el directo y determina la norma de $\|\langle\langle a|\|$.

Recíprocamente, si F_a es continua, definamos $T_a\colon C_0(X) \to C_0(X, L^2(G))$ como antes. Luego T_a es un operador lineal acotado y $\|T_a\| = \sup\{\|F_a(x)\|_2 \colon x \in X\}$. De los argumentos expuestos hasta aquí deducimos que para cada $b \in C_0(X)$ y $x \in X$ la red $\{U\langle\langle a|_{\lambda'} b(x)\}_\lambda$ converge a $T_a(b)(x)$. Esto implica que $T_a(b)$ es el único posible límite de $\{U\langle\langle a|_{\lambda'} b\}_\lambda$. Todo lo que nos resta mostrar es que $\lim_\lambda U\langle\langle a|_{\lambda'} b = T_a(b)$. Para tal propósito observamos que

$$\|T_a(b)(x) - U\langle\langle a|_{\lambda'} b(x)\|_2^2 = |b(x)|^2 \int_G |F_a(x)(s)|^2 (1 - \lambda(s,x)^2)\, ds, \ \forall\, x \in X. \tag{4.3.2}$$

La estrategia es acotar $\|T_a(b) - U\langle\langle a|_{\lambda'} b\|^2 = \sup_{x\in X} \|T_a(b)(x) - U\langle\langle a|_{\lambda'} b(x)\|_2^2$ escribiendo ese supremo como el máximo de dos supremos, uno tomado sobre un compacto de X y el otro sobre su complemento.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Ya que b se anula en infinito existe un compacto $C \subset X$ de manera que $|b(x)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{1+\|T_a\|^2}$ si $x \notin C$. Luego, para todo $x \in X - C$ la desigualdad 4.3.2 implica que

$$\|T_a(b)(x) - U\langle\langle a|_{\lambda'} b(x)\|_2^2 \leq |b(x)|^2 \|F_a(x)\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{1 + \|T_a\|^2} \|T_a\|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{4.3.3}$$

Ahora acotaremos $\|T_a(b)(x) - U\langle\langle a|_{\lambda'} b(x)\|_2^2$ para $x \in C$. Más arriba mostramos que para todo $z \in X$ se cumple que

$$\|F_a(z)\|_2^2 = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_G |F_a(z)(s)|^2 \lambda(s,z)^2\, dt.$$

Luego $\forall\, x \in C$ existe $\lambda_x \in \Lambda$ tal que $\int_G |F_a(x)(s)|^2 \lambda_x(s,x)^2\, dt > \|F_a(x)\|^2 - \varepsilon^2/\|b\|$.

Consideremos ahora la función $u\colon G \times X \to \mathbb{R}$, $u(s,z) = |F_a(z)(s)|^2 \lambda_x(s,z)^2$. Sabemos que u es continua y tiene soporte compacto; por lo tanto $z \mapsto \int_G u(s,z)\, ds$ es continua. Por otra parte $z \mapsto \|F_a(z)\|^2$ también es continua. Estos hechos y la última desigualdad del párrafo anterior implican que cada $x \in C$ tiene un entorno U_x de manera que para todo $y \in U_x$ se cumple que $\int_G |F_a(y)(s)|^2 \lambda_x(s,y)^2\, dt > \|F_a(y)\|^2 - \varepsilon^2/\|b\|$.

Ya que C es compacto podemos encontrar $x_1, \dots, x_n \in C$ de manera que $C \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Tomemos $\lambda_0 \in \Lambda$ mayor o igual a todos los λ_{x_i} $(i = 1, \dots, n)$. Luego para cada $x \in C$ existe un j tal que $x \in U_{x_j}$, lo que implica que

$$\int_G |F_a(x)(s)|^2 \lambda_0(s,x)^2 \, dt \geq \int_G |F_a(x)(s)|^2 \lambda_{x_i}(s,x)^2 \, dt > \|F_a(x)\|^2 - \varepsilon^2/\|b\|.$$

De la ecuación 4.3.2 deducimos que para cada $x \in C$ se cumple que

$$\|T_a(b)(x) - U\langle\langle a|_{\lambda_0}{}' b(x)\|_2^2 \leq \|b\| \frac{\varepsilon^2}{\|b\|} = \varepsilon^2.$$

Usando la ecuación 4.3.3 obtenemos que $\|T_a(b) - U\langle\langle a|_{\lambda_0}{}' b\| \leq \varepsilon$. Además la norma de $T_a(b) - U\langle\langle a|_\lambda b$ decrece con λ, lo que implica que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ se cumple que $\|T_a(b) - U\langle\langle a|_{\lambda'} b\| \leq \varepsilon$. □

Ejemplo 4.4. Supongamos que G es un grupo HLC, tomemos $X = G$ y $\sigma_t(x) = tx$ (la traslación a izquierda). En este caso $a \in C_0(G)$ será cuadrado integrable si y solamente si $\int_G |a(t^{-1})|^2 \, dt < \infty$. En efecto, si a es cuadrado integrable entonces $F_a(e)(t) = a(\sigma_{t^{-1}}(e)) = a(t^{-1})$ y $F_a(e)$ es cuadrado integrable. Eso quiere decir, exactamente, que $\int_G |a(t^{-1})|^2 \, dt < \infty$. Recíprocamente, definamos $v \in L^2(G)$ como $v(t) = a(t^{-1})$ y sea $\lambda \colon G \to \mathbb{B}(L^2(G))$ la representación regular a izquierda $(\lambda_t(u)(s) = u(t^{-1}s))$. Luego $\lambda_x(v)(t) = a((x^{-1}t)^{-1}) = a(t^{-1}x) = F_a(x)$ y F_a es continua pues λ es continua con respecto a la topología SOT.

Es esperable que exista una diferencia si construimos la acción en $G = X$ con la multiplicación por la derecha, es decir $\tau_t(x) = xt^{-1}$. En este caso $F_a(x)(t) = a(xt)$ y si $a \in C_0(X)$ es cuadrado integrable entonces $\int_G |a(t)|^2 \, dt < \infty$. Recíprocamente, si $a \in C_0(X) \cap L^2(G)$ entonces $F_a(x) = \lambda_x(a)$ y a es cuadrado integrable.

Ya que $\int_G |a(t^{-1})|^2 \, dt = \int_G \Delta(t^{-1})|a(t)|^2 \, dt$ podemos esperar que existan elementos de $C_0(G)$ cuadrado integrables con respecto a σ pero no con recepto a τ (y viceversa) sólo si G no es unimodular[6]. Sin embargo $C_c(G)$ es cuadrado integrable tanto con respecto a σ como a τ y por lo tanto las acciones que ellas definen en $C_0(G)$ son cuadrado integrables.

De la siguiente Observación se deduce que no existen acciones parciales cuadrado integrables (en $C_0(X)$) con puntos fijos (en X) de grupos conexos no compactos.

Observación 4.33. Supongamos que σ es una acción parcial HLC de G en X y que $x_0 \in X$ es un punto fijo de σ; es decir que si $x_0 \in X_{t^{-1}}$ entonces $\sigma_t(x_0) = x_0$. En caso que σ defina una acción parcial cuadrado integrable en $C_0(X)$ el conjunto $H := \{t \in G \colon x_0 \in X_t\}$ es un subgrupo compacto y abierto de G.

[6]Unimodular es, por definición, que la función modular del grupo sea constante 1.

En efecto, es un subgrupo porque $e \in H$ y si $s, t \in H$ entonces $x_0 \in X_{s^{-1}}$, $x_0 = \sigma_s(x_0) \in X_s$ y $\sigma_{s^{-1}}(x_0) = x_0$. Esto implica que $s^{-1} \in H$. Por otro lado $\sigma_t(x_0) \in X_{s^{-1}}$, por lo que $x_0 \in X_{t^{-1}s^{-1}}$ y $\sigma_{st}(x_0) = \sigma_s(\sigma_t(x_0)) = \sigma_s(x_0) = x_0$, con lo cual $st \in H$. Además H es abierto porque el dominio de σ es abierto en $G \times X$. Luego H también es cerrado y para terminar nos bastará con mostrar que tiene medida finita (ver [HR63, IV 15.9]).

Tomemos $a \in C_c(X)$ de manera que $a(x_0) = 1$. Luego para todo $t \in H$ se tiene que $F_a(x)(t) = a(\sigma_{t^{-1}}(x)) = a(x) = 1$ y $F_a(x) \in L^2(G)$ es cuadrado integrable. Entonces la medida de H es finita pues coincide con $\int_G F_a(x_0)(t)\, dt$.

Veamos un ejemplo concreto para una acción parcial no global.

Ejemplo 4.5. Tomemos $G = \mathbb{R}$, $X = (0, +\infty)$, ambos con sus topologías usuales, y σ la acción parcial de G en X definida por la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^2$. Es decir que $\sigma_t(x) = (t + 1/x)^{-1}$ y el dominio de σ es $\{(t, x) \in G \times X : t > -1/x\}$. Evidentemente esta es una acción parcial no global. Si $a \in C_0(X)$ es cuadrado integrable entonces $F_a(1)(t) = a((1+t)^{-1})$ y $\int_{-1}^{+\infty} |a((1+t)^{-1})|^2\, dt < \infty$. Como veremos a continuación la finitud de la integral es una condición necesaria y suficiente para la cuadrado integrabilidad.

Las acciones σ de los Ejemplos 4.4 y 4.5 tienen las siguientes características:

(a) σ es transitiva, es decir que existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\sigma x_0 = X$ (su órbita es X). Equivalentemente, para todo $x \in X$ se cumple que $\sigma x = X$.

(b) Para cada $x \in X$ la función $\mathrm{ev}_x \colon \{t \in G \colon x \in X_{t^{-1}}\} \to X$, $t \mapsto \sigma_t(x)$, es un homeomorfismo local en un entorno de la identidad. Es decir que existen abiertos U y V, de $e \in G$ y x respectivamente, tales que $\mathrm{ev}_x|_U \colon U \to V$ es un homeomorfismo.

Proposición 4.34. *Supongamos que σ es una acción parcial HLC de G en X. Luego para cada $(t, x) \in \Gamma_\sigma$ tal que $F_a(x) \in L^2(G)$ se cumple que $F_a(\sigma_t(x)) \in L^2(G)$ y $F_a(\sigma_t(x)) = \lambda_t(F_a(x))$, siendo $\lambda \colon G \to \mathbb{B}(L^2(G))$ la representación regular a izquierda.*

Si, además, σ tiene las propiedades (a) y (b) de arriba y definimos $\psi \colon C_0(X) \to L^\infty(G)$ como $\psi(a)(t) = F_a(x_0)(t)$, entonces $C_0(X)_{si} = \psi^{-1}(L^\infty(G) \cap L^2(G))$ y para cada $a \in C_0(X)_{si}$ se cumple que $F_a(\sigma_t(x_0)) = \lambda_t(\psi(a))$.

Demostración. Tomemos (t, x) en el dominio de σ tal que $F_a(x) \in L^2(G)$ y veamos que $F_a(\sigma_t(x)) = \lambda_{t^{-1}}(F_a(x))$. Sabemos que $\sigma_t(x) \in X_s$ si y solamente si $x \in X_{t^{-1}s} \cap X_{t^{-1}}$. Por lo tanto, si $\sigma_t(x) \in X_s$ entonces $F_a(\sigma_t(x))(s) = a(\sigma_{s^{-1}t}(x)) = F_a(x)(t^{-1}s) = \lambda_t(F_a(x))(s)$. En cambio, si $\sigma_t(x) \notin X_s$, entonces $F_a(\sigma_t(x))(s) = 0 = F_a(x)(t^{-1}s) = \lambda_t(F_a(x))(s)$. Hemos mostrado que $F_a(\sigma_t(x)) = \lambda_t(F_a(x)) \in L^2(G)$.

Pasando a la segunda parte de la tesis, de acuerdo con nuestro Teorema de caracterización de elementos cuadrado integrables, es evidente que si $a \in C_0(X)_{\text{si}}$ entonces $\psi(a) = F_a(x_0) \in L^\infty(G) \cap L^2(G)$, es decir que $C_0(X)_{\text{si}} \subset \psi^{-1}(L^\infty(G) \cap L^2(G))$. Asumamos ahora que $F_a(x_0) = \psi(a) \in L^2(G)$. En este caso lo probado en el párrafo anterior implica que $F_a(y) \in L^2(G)$ y $\|F_a(x_0)\|_2 = \|F_a(y)\|_2$ para todo $y \in \sigma x_0 = X$. Es evidente entonces que $F_a \colon X \to L^2(G)$ es acotada y nos resta mostrar que es continua. Dado $x \in X$ tomemos $t \in G$ tal que $x_0 \in X_{t^{-1}}$ y $\sigma_t(x_0) = x$. Tomemos, además, un entorno U de $e \in G$ y uno V de x de manera que $\mathrm{ev}_x|_U$ es un homeomorfismo de U en V; llamemos h a la inversa de ese homeomorfismo. Podemos asumir que $U \subset X_t$ pues $x \in X_t$ y X_t es abierto. Luego, para cada $y \in V$, tenemos que $F_a(y) = F_a(\sigma_{h(y)}(x)) = F_a(\sigma_{h(y)t}(x_0)) = \lambda_{h(y)t}(\psi(a))$. Como λ es SOT $-$continua y h es continua en V, F_a es continua en V. Luego F_a es continua en todo punto. □

4.3.1. Equivalencia propias - cuadrado integrables

Rieffel demostró [Rie04] que las acciones integrables (que son las mismas que las cuadrado integrables) en C*-álgebras conmutativas son exactamente las acciones que provienen de acciones propias en el espectro del álgebra. En esta sección demostraremos este hecho para las acciones parciales.

El lector familiarizado con el artículo de Rieffel podrá a apreciar que nuestra prueba es, básicamente, la prueba de Rieffel. Las modificaciones introducidas son menores.

Recordemos que si σ es una acción parcial HLC de G en X hemos llamado (en la Sección 1.3.1) $\Theta(\sigma)$ a la acción parcial que define σ en $C_0(X)$, la cual es una acción parcial en C*-álgebras.

Teorema 4.35. *Si σ es una acción parcial HLC y propia de G en X entonces $C_c(X) \subset C_0(X)_{si}$ y por lo tanto $\Theta(\sigma)$ es cuadrado integrable.*

Demostración. Para simplificar la prueba definamos $\alpha := \Theta(\sigma)$. Pensemos primero que σ es global, el caso general se deduce de este. Dados $a \in C_c(X)$ y $x_0 \in X$ tomemos un entorno compacto V de x_0 y llamemos C a la clausura del soporte de a. Veamos que $F_a(y) \in L^2(G)$ para todo $y \in V$ y que $F_a \colon X \to L^2(G)$ es continua en x_0 (esto es suficiente para mostrar que F_a es continua).

Sea $D := \{(t,x) \in G \times X : (x, \sigma_{t^{-1}}(x)) \in V \times C\}$, que es compacto, y tomemos $g \in C_c(G \times X)$ constante e igual a 1 en D. Definamos $f \in C_c(G \times X)$ como $f(t,x) = a(\sigma_{t^{-1}}(x))g(t,x)$. Si $x \in V$ y $f(t,x) \neq 0$, entonces $\sigma_{t^{-1}}(c) \in C$ y $f(t,x) = a(\sigma_{t^{-1}}(x))g(t,x) = a(\sigma_{t^{-1}}(x)) = F_a(x)(t)$. En cambio si $x \in V$ y $f(t,x) = 0$ entonces o bien $a(\sigma_{t^{-1}}(x)) = 0$, en cuyo caso

$f(t,x) = F_a(x)(t)$, o $g(t,x) = 0$. En este último caso tiene que ser $\sigma_{t^{-1}}(x) \notin C$ y por lo tanto $f(t,x) = 0 = a(\sigma_{t^{-1}}(x)) = F_a(x)(t)$. Hemos mostrado que $F_a(x)(t) = f(t,x)$ para todo $(t,x) \in G \times V$. Luego, para todo $x \in V$, $F_a(x)$ es continua y tiene soporte compacto, lo que implica que $F_a(x) \in L^2(G)$.

Para mostrar que F_a es continua en x_0 llamemos K a la proyección sobre G del soporte de f. Luego para todo $x \in V$ $\|F_a(x) - F_a(x_0)\|_2^2 \leq \mu(K)\|f(\cdot,x) - f(\cdot,x_0)\|_\infty$. La función $X \to C_c(G), x \mapsto f(\cdot,x)$, es continua pues $f \in C_c(G \times X)$, lo que implica que $\|F_a(x) - F_a(x_0)\|_2^2 \to 0$ cuando $x \to x_0$. Luego F_a es continua en x_0.

Lo único que nos resta mostrar, en el caso de las acciones globales, es que F_a está acotada. Llamemos π a la proyección canónica de X en su espacio de órbitas X/G. Lo que mostramos antes, junto con la Proposición 4.34, implica que la función $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|F_a(x)\|_2$, es continua y constante en las órbitas; por lo tanto existe una única función continua $h\colon X/G \to \mathbb{R}$ tal que $h(\sigma x) = \|F_a(x)\|_2$. Por otro lado, si $\sigma x \cap \overline{\mathrm{sop}}(a) = \emptyset$ entonces $F_a(x) = 0$ y por lo tanto $h(\sigma x) = 0$; deducimos que h se anula fuera del compacto $\pi(\overline{\mathrm{sop}}(a))$, y de ello se desprende que h está acotada. Esto último implica, inmediatamente, que F_a está acotada superiormente.

Pasemos a ocuparnos del caso general. De acuerdo con el Lema 4.8 podemos asumir que σ es la restricción de una acción parcial propia τ de G en Y, con lo cual estamos asumiendo que X es un abierto de Y y que Y es HLC. Pensemos $C_0(X)$ como un ideal de $C_0(Y)$ de la manera usual, con lo cual $C_c(X) \subset C_c(Y)$. Luego $C_c(X) \subset C_0(Y)_{\mathrm{si}}$. Llamemos F_a^τ a la función F_a construida a partir de $a \in C_c(X)$ con la acción τ y F_a^σ a la construida con σ. Luego $F_a^\tau\colon Y \to L^2(G)$ es continua y acotada. La prueba habrá concluido si mostramos que $F_a^\tau|_X = F_a^\sigma$. Dado $x \in X$, si $x \in X_t$ entonces $F_a^\sigma(x)(t) = a(\sigma_{t^{-1}}(x)) = a(\tau_{t^{-1}}(x)) = F_a^\tau(x)(t)$. En cambio si $x \notin X_t$ entonces $\tau_{t^{-1}}(x) \notin X$ pues en caso contrario $x \in X \cap \tau_t(X) = X_t$. De esto deducimos que $F_a^\sigma(x)(t) = 0 = a(\tau_{t^{-1}}(x)) = F_a^\tau(x)(t)$. □

Dividiremos la demostración del recíproco del Teorema anterior en varios Lemas. Comenzamos observando que el Teorema anterior se cumple para las acciones cuadrado integrables.

Observación 4.36. Si $\Theta(\sigma)$ es cuadrado integrable entonces $C_c(X) \subset C_0(X)_{\mathrm{si}}$. Esto se debe a que $C_0(X)$ es conmutativa y $C_0(X)_{\mathrm{si}}$ un ideal a derecha y denso, por lo tanto es un ideal denso y debe contener al ideal de Pedersen [LS75] de $C_0(X)$, que es $C_c(X)$.

Lema 4.37. *Si $\Theta(\sigma)$ es cuadrado integrable entonces tiene una globalización y su globalización envolvente también es cuadrado integrable.*

Demostración. Para mostrar que $\Theta(\sigma)$ tiene una globalización basta mostrar (Teorema 1.78) que el gráfico de σ, $\mathrm{Gr}(\sigma)$, es cerrado en $G \times X \times X$. Supongamos que la red

$\{(t_i, x_i, y_i)\}_i \subset \mathrm{Gr}(\sigma)$ converge a $(t, x, y) \in G \times X \times X$. Tomemos $a \in C_c(X)$ tal que $a(y) \neq 0$. Luego $F_a(y_i) \to F_a(y)$ en $L^2(G)$ y $F_a(y_i) = F_a(\sigma_{t_i}(x_i)) = \lambda_{t_i^{-1}}(F_a(x_i))$. Puesto que $\|\lambda_r\| = 1$ para todo r y $F_a(x_i) \to F_a(x)$ en $L^2(G)$, tenemos que $\|\lambda_{t_i}(F_a(x_i)) - \lambda_t(F_a(x))\|_2 \to 0$, deducimos que $\|F_a(y) - \lambda_t(F_a(x))\|_2 = 0$, $F_a(y) = \lambda_t(F_a(x))$ en casi todo punto. Por lo tanto el interior de $\{s \in G\colon F_a(y)(s) \neq F_a(x)(t^{-1}s)\}$ es vacío. Ya que la identidad de G, e, no puede estar en el interior de ese conjunto existe una red $\{s_j\}_j$ que converge a e tal que $F_a(y)(s_j) = F_a(x)(t^{-1}s_j)$ para todo j. La definición de F_a implica que $F_a(y)$ es continua en e y $F_a(y)(e) = a(y) \neq 0$. Luego el Teorema de conservación del signo implica que existe j_0 tal que, para todo $j \geq j_0$, $F_a(x)(t^{-1}s_j) \neq 0$. Entonces para todo $j \geq j_0$ debe cumplirse que $x \in X_{t^{-1}s_j}$ y que $a(\sigma_{s_j^{-1}t}(x)) \neq 0$. Lo último nos dice que $\{\sigma_{s_j^{-1}t}(x)\}_j \subset \mathrm{sop}(a)$ y, ya que $\mathrm{sop}(a)$ es compacto y el dominio de σ es abierto, podemos encontrar un entorno de e, U, tal que $U \times \mathrm{sop}(a) \subset \Gamma_\sigma$. Por otra parte existe un $j_1 \geq j_0$ tal que $s_{j_1} \in U$ y por lo tanto es posible calcular $\sigma_{s_{j_1}}(\sigma_{s_{j_1}^{-1}t}(x))$. La definición de acción parcial nos dice entonces que $x \in X_t$ y $\sigma_{s_{j_1}}(\sigma_{s_{j_1}^{-1}t}(x)) = \sigma_t(x)$. La continuidad de σ implica que $y = \lim y_i = \lim_i \sigma_{t_i}(x_i) = \sigma_t(x)$.

Habiendo demostrado que σ tiene una globalización podemos asumir que existe una acción (global) HLC de G en Y, que X es un abierto de Y cuya $\tau-$órbita es Y y que $\sigma = \tau|_X$. El resto de la prueba consiste en mostrar $\Theta(\tau)$ es cuadrado integrable pues ella es una globalización envolvente de $\Theta(\sigma)$.

Como lo hicimos en la demostración de Teorema 4.35 podemos mostrar que para todo $a \in C_c(X) \subset C_c(Y)$ se cumple que $F_a^\sigma = F_a^\tau|_X$, pensando $C_0(X, L^2(G)) \subset C_0(Y, L^2(G))$. Deducimos entonces que $C_c(X) \subset C_0(Y)_{\mathrm{si}}$. Por otra parte el Teorema 4.25 implica que $[\tau C_c(X)] \subset C_0(Y)_{\mathrm{si}}$. Además $[\tau C_c(X)]$ es denso en $C_0(Y)$ porque $[\tau C_0(X)]$ es denso en $C_0(Y)$, luego $C_0(Y)_{\mathrm{si}}$ es denso en $C_0(Y)$ y $\Theta(\tau)$ es cuadrado integrable. $\square$

Para no ser repetitivos conviene enunciar lo siguiente.

Definición 4.38. Diremos que una red $\{z_j\}_j$ del espacio topológico Z tiende a infinito si para todo compacto C de Z existe un j_0 de manera que si $j \geq j_0$ entonces $z_j \in Z \setminus C$.

Recordemos que la compactificación por un punto de Z, o la compactificación de Alexandroff de Z, es $Z_\infty := Z \cup \{\infty\}$, siendo Z abierto en Z_∞ y los entornos de ∞ son los complementos -en Z_∞- de compactos de Z. O sea que las redes de Z que tienden a infinito son exactamente aquellas redes que tienden a ∞ en Z_∞.

Lema 4.39. *Supongamos que $\{t_j\}_j$ es una red de G que tiende a infinito. Luego para toda $f, g \in L^2(G)$ se cumple que $\lim_j \langle \lambda_{t_j}(f), g\rangle = 0$.*

Demostración. Supongamos primero que $f, g \in C_c(G)$. Ya que la multiplicación de G es continua $C := \overline{\mathrm{sop}}(g)^{-1}\overline{\mathrm{sop}}(f)$ es compacto. Por lo tanto existe j_0 tal que si $j \geq j_0$ entonces $t_j \in G \backslash C$. Por otra parte, si $t \in G\backslash C$ y $r \in G$, entonces $\overline{f(t^{-1}r)}g(r) = 0$ pues en caso contrario $t^{-1}r \in \mathrm{sop}(f)$ y $r \in \mathrm{sop}(g)$, lo que implica $t \in \mathrm{sop}(g)^{-1}\mathrm{sop}(f) \subset C$. Es evidente entonces que si $j \geq j_0$ se cumple que $\langle \lambda_{t_i}(f), g\rangle = \int_G \overline{f(t^{-1}r)}g(r)\, dr = 0$.

En el caso general, para cada $\varepsilon > 0$ sean $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in C_c(G)$ tales que $\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$ y $\|g - g_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Luego, para todo j,

$$|\langle \lambda_{t_j}(f), g\rangle| \leq \varepsilon \|g\|_2 + (\|f\|_2 + \varepsilon)\varepsilon + |\langle \lambda_{t_j}(f_\varepsilon), g_\varepsilon\rangle|,$$

de lo que se deduce fácilmente la tesis. □

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema 4.7 de [Rie04]. Para poder usar ese resultado debemos hacer algunas observaciones. Supongamos que α es una acción global del grupo HLC G en la C*-álgebra A. Dados $a \in A_{\mathrm{si}}$, $b, c \in A$ y $g \in C_c(G)$ se tiene que

$$|a\rangle\rangle\langle\langle a|b_{g\otimes c} = \int_G \alpha_t(a^*a)bcg(t)\, dt.$$

Cambiemos c por un elemento de una unidad aproximada de A, $\{c_i\}_i$, y tomemos g tal que $0 \leq g \leq 1$. Luego tomemos límite en la unidad aproximada y en g (con el orden usual de $C_c(G)^+$) simultáneamente. El límite (existe y) es $|a\rangle\rangle\langle\langle a|b$ porque $a \in A_{\mathrm{si}}$.

Por otro lado $\mathrm{lím}_g\, \mathrm{lím}_i \langle\langle a|b_{g\otimes c} = \mathrm{lím}_g\, \mathrm{lím}_i\, g\langle\langle a|bc_i = \mathrm{lím}_g\, g\langle\langle a|b = \langle\langle a|b$. Entonces $\mathrm{lím}_g \int_G \alpha_t(a^*a)bg(t)\, dt = |a\rangle\rangle\langle\langle a|b$. En términos de [Exe00, Definición 2.1] esto nos dice que a^*a es $\alpha-$integrable. Luego [Rie04, Proposición 4.4] implica que si α es cuadrado integrable entonces es propia en el sentido de [Rie04, Definición 4.5].

Luego de los comentarios anteriores el lector puede utilizar directamente el Teorema 4.7 de [Rie04] para mostrar el lema que sigue. Ofrecemos una prueba directa que resume las ideas de ese artículo.

Lema 4.40. *Si $\Theta(\sigma)$ es global y cuadrado integrable entonces σ es propia.*

Demostración. Sabemos que $\alpha := \Theta(\sigma)$ es global si y solamente si σ lo es, por lo tanto asumiremos que σ es global. De acuerdo al Lema 4.4 basta con mostrar que para todo par de compactos $K, L \subset X$ es posible encontrar un compacto que contiene a $((K, L)) := \{t \in G \colon \sigma_t(K) \cap L \neq \emptyset\}$.

La demostración será por absurdo. Si $((K, L))$ no está contenido en un compacto entonces para todo compacto $j \subset G$ existe $t_j \in ((K, L))\backslash j$, con lo cual existe $x_j \in K$ tal que $\sigma_{t_j}(x_j) \in L$. Ordenando lo compactos de G de acuerdo a $j \leq l \Leftrightarrow j \subset l$ obtenemos un conjunto dirigido y por lo tanto $\{t_j\}_j$ y $\{x_j\}_j$ son redes. Es evidente que $\{t_j\}_j$ tiende a infinito.

Ya que K es compacto podemos encontrar una subred $\{x_{j_k}\}_k$ convergente a cierto $x \in K$. Pasando a una subred nuevamente podemos asumir que $\{\sigma_{t_{j_k}}(x_{j_j})\}_k$ converge a cierto $y \in L$. Definamos $x_k := x_{j_k}$ y $t_k := t_{j_k}$ y observemos que $\{t_k\}_k$ tiende a infinito porque ha sido construida como una subred de una red que tiende a infinito.

Sea $a \in C_c(X)$ constante e igual a 1 en L. Ya que $F_a(y)$ es continua en e y $F_a(y)(e) = a(e) \neq 0$ tenemos que $\|F_a(y)\|_2 > 0$. Por otro lado $\lambda_{t_k}(F_a(x_k)) = F_a(\sigma_{t_k}(x_k)) \to F_a(y)$ en $L^2(G)$. Además $\|\lambda_{t_k}(F_a(x)) - \lambda_{t_k}(F_a(x_k))\|_2 = \|F_a(x) - F_a(x_k)\|_2 \to 0$, de lo que deducimos $\|\lambda_{t_k}(F_a(x)) - F_a(y)\|_2 \to 0$. De acuerdo al Lema anterior

$$0 = \lim_j \langle \lambda_{t_k}(F_a(x)), F_a(y)\rangle = \|F_a(y)\|_2 > 0,$$

lo que claramente es absurdo. $\square$

Ahora podemos mostrar el recíproco del Teorema 4.35.

Teorema 4.41. *Si $\Theta(\sigma)$ es cuadrado integrable entonces σ es propia.*

Demostración. Sabemos que si $\Theta(\sigma)$ es cuadrado integrable entonces σ tiene una globalización envolvente τ (de G en Y) y que $\Theta(\tau)$ es cuadrado integrable. El lema anterior implica que τ es propia y del Lema 4.8 deducimos que σ es propia. $\square$

4.4. Restricciones y Globalizaciones

Con respecto a las restricciones de las acciones cuadrado integrables tenemos dos resultados, el primero sobre restricciones de acciones parciales y el segundo sobre globalizaciones.

Teorema 4.42. *Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ y que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}I$ es un ideal de $\mathcal{X}$ ($I = \overline{\operatorname{span}}\,\langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y}\rangle$). Si $\alpha := \gamma^r$, $\delta := \gamma|_{\mathcal{Y}}$, $\beta := \delta^r = \alpha|_I$ y pensamos $L^2_\beta(G, I) \subset L^2_\alpha(G, A)$ entonces $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}^\gamma_{si} \subset \mathcal{Y}^\delta_{si}$. Además para todo $y \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}^\gamma_{si}$ se cumple que $\langle\langle y|^\gamma|_{\mathcal{Y}} = \langle\langle y|^\delta$ y que $|y\rangle\rangle^\gamma|_{L^2_\beta(G,I)} = |y\rangle\rangle^\delta$ (el supra índice indica la acción con respecto a la cual se calcular los operadores $\langle\langle\cdot|$ y $|\cdot\rangle\rangle$).*

Demostración. Probemos que dados $y \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}^\gamma_{\mathrm{si}}$, $z \in \mathcal{Y}$ y $f \in C^\beta_c(G, I)$ se cumple que $\langle\langle y|^\delta_f z = \langle\langle y|^\delta_f z$. En efecto, como δ es la restricción de γ a $\mathcal{Y}$ para todo $t \in G$ se tiene

$$\langle\langle y|^\delta_f z(t) = \langle \delta_t(xf(t^{-1}))|y\rangle = \langle \gamma_t(xf(t^{-1}))|y\rangle = \langle\langle y|^\gamma_f(t).$$

Probemos ahora que, con y y z como antes, $\langle\langle y|^{\gamma} z \in L^2_\beta(G,I)$. Dada $g \in C^\alpha_c(G,A)$ se tiene que $\langle\langle y|^{\gamma}_g z(t) = \langle \gamma(yg(t^{-1})), z\rangle$. Por un lado se tiene $\gamma(yg(t^{-1})) \in \gamma(\mathcal{Y}A_{t^{-1}})$ y por otro $z \in \mathcal{Y}$, luego $\langle\langle y|^{\gamma}_g z(t)$ pertenece al ideal de A asociado a la intersección de $\gamma(\mathcal{Y}A_{t^{-1}})$ con $\mathcal{Y}$, que es $I_t := \gamma_t(\mathcal{Y}A_{t^{-1}}) \cap \gamma$. Si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $C^\alpha_0(G,A)$ contenida en $C^\alpha_c(G,A)$ entonces $\{\langle\langle y|^{\gamma}_{e_i} z\}_i$ está contenida en $L^2_\beta(G,I)$ y converge a $\langle\langle y|^{\gamma} z$, luego $\langle\langle y|^{\gamma} z \in L^2_\beta(G,I)$.

Tomemos ahora una unidad aproximada de $C^\beta_0(G,I)$ contenida en $C^\beta_c(G,I)$, también llamada $\{e_i\}_i$. De los dos últimos párrafos se deduce que $\{\langle\langle y|^{\delta}_{e_i} z\}_i = \{M_{\pi(e_i)}\langle\langle y|^{\gamma} z\}_i$ converge en $L^2_\beta(G,I)$ a $\langle\langle y|^{\gamma} z$. Como $z \in \mathcal{Y}$ es arbitrario $y \in \mathcal{Y}^\delta_{\text{si}}$ y $\langle\langle y|^{\delta} = \langle\langle y|^{\gamma}|_{\mathcal{Y}}$.

Para terminar observemos que, con y como arriba y $f \in C^\beta_c(G,I)$, se tiene que

$$|y\rangle\rangle^\delta(f) = \int_G \delta_t(y\beta_{t^{-1}}(f(t)))\,dt = \int_G \gamma_t(y\alpha_{t^{-1}}(f(t)))\,dt = |y\rangle\rangle^\gamma(f).$$

Entonces el operador $|y\rangle\rangle^\delta$ coincide con $|y\rangle\rangle^\gamma$ en $C^\beta_c(G,I)$ y ambos son continuos, por lo tanto coinciden en $\overline{C^\beta_c(G,I)} = L^2_\delta(G,I)$. □

Teorema 4.43. *Supongamos que γ es una acción global en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_B$ y que A es un ideal de B de manera que $\overline{[\gamma\mathcal{X}A]} = \mathcal{X}$. Definamos $\mathcal{Y} := \mathcal{X}A$ y $\delta := \gamma|_{\mathcal{Y}}$. Luego $\mathcal{Y}_{si} = \mathcal{X}_{si} \cap \mathcal{Y}$ y γ es cuadrado integrable si y solamente si δ lo es.*

Demostración. Utilizaremos supra índices en los operadores $|\,\rangle\rangle$ y $\langle\langle\,|$ para indicar según estemos considerando γ o δ. Llamaremos β a γ^l y α a δ^l. Recordemos que $\beta|_A = \alpha$. Del Teorema anterior se deduce que $\mathcal{X}_{\text{si}} \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_{\text{si}}$.

Para demostrar la otra inclusión tomemos $x, y \in \mathcal{Y}_{\text{si}}$ y una unidad aproximada de $C^\delta_0(G,B)$ contenida en $C^\delta_c(G,B)$, $\{e_i\}_i$. De la demostración del Teorema anterior (segundo párrafo) deducimos que $\langle\langle x|^{\gamma}_{e_i} y \in C^\alpha_c(G,A)$. Si ahora $\{f_k\}_k$ es una unidad aproximada de $C^\alpha_0(G,A)$ contenida en $C^\alpha_c(G,A)$ entonces $\langle\langle x|^{\gamma}_{e_i} y = \lim_k M_{\pi(f_k)}\langle\langle x|^{\gamma}_{e_i} y$. Por otro lado, para todo $t \in G$:

$$\begin{aligned} M_{\pi(f_k)}\langle\langle x|^{\gamma}_{e_i} y(t) &= \alpha_t(f_k(t^{-1}))\langle \gamma_t(xe_i(t^{-1})), y\rangle = \langle \gamma_t(xf_ke_i(t^{-1})), y\rangle \\ &= \langle \delta_t(xf_ke_i(t^{-1})), y\rangle = M_{\pi(f_ke_i)}\langle\langle x|^{\delta} y(t) = M_{\pi(f_k)}M_{\pi(e_i)}\langle\langle x|^{\delta} y(t), \end{aligned}$$

Tomando límite en k obtenemos $\langle\langle x|^{\gamma}_{e_i} y = M_{\pi(e_i)}\langle\langle x|^{\delta} y$ porque el hecho de que $C^\alpha_0(G,A)$ sea un ideal de $C^\delta_0(G,B)$ implica que $M_{\pi(e_i)}\langle\langle x|^{\delta} y \in L^2_\alpha(G,A)$. Tomando límite en i se deduce que $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{e_i} y\}_i$ converge en $L^2_\alpha(G,A)$ a $\langle\langle x|^{\delta} y$.

Nos será muy útil mostrar que si $x, y \in \mathcal{Y}$ y $\{e_j\}_j$ es una unidad aproximada de $C^\alpha_0(G,A)$ contenida en $C^\alpha_c(G,A)$, entonces la red $\{\langle\langle x|^{\delta}_{e_j} y\}_j$ tiene como límite puntual la función $[x,y]\colon G \to A$, $[x,y](t) = \langle \gamma_t(x)|y\rangle$. En efecto, fijemos $x, y \in \mathcal{Y}$ y $s \in G$. Luego $[x,y](s) \in$

$\beta_s(A)\langle\mathcal{X}|\mathcal{X}\rangle A \subset A_s$ y, además, $\{\beta_s(e_j(s^{-1}))\}_j$ es una unidad aproximada de A_s. Por lo tanto $[x,y](s) = \text{lím}_j\langle\gamma_s(xe_j(s^{-1}))|y\rangle = \text{lím}_j\langle\delta_s(xe_j(s^{-1}))|y\rangle = \text{lím}_j\langle\langle x|^{\delta}_{e_j}y(s)$.

Sea $M\colon C_0(G,B) \to \mathbb{B}(L^2(G,B))$ la representación por operadores de multiplicación y $\pi\colon C_0(G,B) \to C_0(G,B)$ el isomorfismo dado por $\pi(f)(s) = \beta_s(f(s^{-1}))$. Supongamos $x \in \mathcal{Y}_{\mathrm{si}}$ y tomemos $y \in \mathcal{Y}$ y $\{f_k\}_k$ una unidad aproximada de $C_0(G,B)$ contenida en $C_c(G,B)$. Recordando que $M_{e_j}\langle\langle x|^{\delta}y = \langle\langle x|^{\delta}_{e_j}y$ y calculando los siguientes límites en $L^2(G,B)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\langle\langle x|^{\gamma}_{f}y = \pi(f)[x,y] &= \lim_j M_{e_j}\pi(f)[x,y] = \lim_j \langle\langle x|^{\delta}_{\pi(e_j)f}y\\ &= \lim_j M_{e_j\pi(f)}\langle\langle x|^{\delta}y = \lim_j M_{e_j}M_{\pi(f)}\langle\langle x|^{\delta}y = M_{\pi(f)}\langle\langle x|^{\delta}y.\end{aligned}$$

Luego la red $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}y\}_k$ converge en $L^2(G,B)$ a $\langle\langle x|^{\delta}y$.

Fijemos $x \in \mathcal{Y}_{\mathrm{si}}$, queremos mostrar que $x \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$. La última concusión del párrafo anterior nos dice que para todo $y \in \mathcal{Y}$ la red $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}y\}_k$ tiene límite (en $L^2(G,B)$) $\langle\langle x|^{\delta}y$. Para ver que el límite también existe para todo $y \in [\gamma\mathcal{Y}]$ llamaremos ϱ a la acción que definen, en $L^2(G,A)$, β y la representación regular a izquierda de G. Veamos que si $y \in \mathcal{Y}$ y $s \in G$ entonces $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}\gamma_s(y)\}_k$ converge a $\varrho_s(\langle\langle x|^{\delta}y)$. Para cada k definamos $f_k'(t) := f_k(s^{-1}t)$. Luego $\{f_k'\}_k$ es una unidad aproximada de $C_0(G,B)$ contenida en $C_c(G,B)$. Un cálculo directo muestra que $\varrho_{s^{-1}}(\langle\langle x|^{\gamma}(\gamma_s(y))) = \langle\langle x|^{\gamma}_{f_k'}y$. Por lo tanto la red $\{\varrho_{s^{-1}}(\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}\gamma_s(y))\}_k$ converge a $\langle\langle x|^{\delta}y$, de lo que se deduce que $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}\gamma_s(y)\}_k$ converge a $\varrho_s(\langle\langle x|^{\delta}y)$. Por linealidad concluimos que para todo $z \in [\gamma\mathcal{Y}]$ la red $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}z\}_k$ tiene límite (y que no depende de la unidad aproximada).

Podemos pensar a $\langle\langle x|^{\gamma}$ como una función lineal de $[\gamma\mathcal{Y}]$ en $L^2(G,B)$, equivariante con respecto a γ y ϱ y que coincide con $\langle\langle x|^{\delta}$ en $\mathcal{Y}$ (por lo tanto es continua en $\mathcal{Y}$). Puesto que $\langle\langle x|^{\gamma}$ coincide con un operador adjuntable en $\mathcal{Y}$, la restricción $T := \langle\langle x|^{\gamma}|_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \to L^2(G,A)$ es un morfismo continuo de $A-$módulos (algebraicos). Como además $\langle\langle x|^{\gamma}$ es $\gamma-\varrho-$equivariante, T es un morfismo de acciones parciales entre δ y $\nu := \varrho|_{L^2(G,A)}$. En estas condiciones podemos usar el Lema 3.17 para concluir que existe un único morfismo (continuo) de $B-$módulos $T^e\colon \mathcal{X} \to L^2(G,B)$ que extiende a T y es $\gamma-\varrho-$equivariante. Además $\|T^e\| = \|T\| = \|\langle\langle x|^{\gamma}\|$.

Para terminar mostremos que para todo $z \in \mathcal{X}$ la red $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}z\}_k$ tiene límite en $L^2(G,B)$. Para z fijo tomemos una sucesión $\{z_n\}_n \subset [\gamma\mathcal{Y}]$ que converge a z. Fijada f_k la sucesión $\{\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}z_n\}_n$ converge en $L^2(G,B)$ porque converge en el límite inductivo a $\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}z$. Por lo tanto para toda f_k tenemos que

$$\langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}z = \lim_n \langle\langle x|^{\gamma}_{f_k}z_n = \lim_n M_{f_k}\langle\langle x|^{\gamma}z_n = \lim_n M_{f_k}T^e(z_n) = M_{f_k}T^e(z).$$

Como M es no degenerada $\text{lím}_k \langle\langle x|^{\gamma}_{f_k} z = T^e(z)$; lo que termina de mostrar que $x \in \mathcal{X}_{\text{si}}$. $\square$

De la demostración anterior y del hecho de que $\|T\| = \|T^e\|$ deducimos lo siguiente:

Corolario 4.44. *Con la notación del enunciado anterior, para cada $x \in \mathcal{Y}_{si}$ se cumple que $\langle\langle x|^{\gamma}|_{\mathcal{Y}} = \langle\langle x|^{\delta}$ y $\|\langle\langle x|^{\gamma}\| = \|\langle\langle x|^{\delta}\|$.*

Corolario 4.45. *Si γ es una acción parcial en módulos de Hilbert y $(\delta, \iota, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ es una globalización envolvente de γ, entonces γ es cuadrado integrable si y solamente si δ lo es.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos usar la notación del Teorema de arriba (asumimos $\gamma|_{\mathcal{Y}} = \delta$). Si γ es cuadrado integrable entonces $\mathcal{X}_{\text{si}}A \subset \mathcal{Y}_{\text{si}}$ es denso en $\mathcal{Y}$, y por lo tanto δ es cuadrado integrable.

En caso que δ sea cuadrado integrable entonces $\mathcal{X}_{\text{si}} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\text{si}}$ es denso en $\mathcal{Y}$. Como $\mathcal{X}_{\text{si}}$ es γ invariante $[\gamma\mathcal{Y}_{\text{si}}] \subset \mathcal{X}_{\text{si}}$ es denso en $\mathcal{X}$, luego γ es cuadrado integrable. $\square$

4.5. Sumas directas y productos tensoriales

En esta sección veremos cómo se comportan las acciones cuadrado integrables con respecto a las sumas directas y los productos tensoriales.

Supongamos que G es un grupo HLC, α una acción parcial en C*-álgebras de G en A y que δ una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{Y}$.

Definición 4.46. Diremos que $\phi\colon A \to \mathbb{B}(\mathcal{Y})$ es un *homomorfismo fuertemente no degenerado* (con respecto a α y δ) si es un $*-$homomorfismo que para todo $t \in G$ satisface que $\phi(A_t)\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_t$.

En caso que γ sea una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ diremos que $\phi\colon A \to \mathbb{B}(\mathcal{Y})$ es fuertemente no degenerado (con respecto a γ y δ) si es un homomorfismo fuertemente no degenerado con respecto a γ^r y δ.

Ejemplo 4.6. Recordemos el Ejemplo 1.7 donde construimos la acción parcial $1_{\mathcal{H}} \otimes \gamma$ de G en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{X}$, siendo $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y γ una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$. Definamos un homomorfismo $\phi\colon \mathbb{B}(\mathcal{X}) \to \mathbb{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{X})$ de forma que $\phi(T)(h \otimes x) = h \otimes Tx$. Para poder definir ϕ basta con mostrar que para todo $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ y $x_1, \ldots x_n \in \mathcal{X}$ se cumple que $\sum_{i,j} \langle h_i \otimes Tx_i, h_j \otimes Tx_j\rangle \leq \|T\|^2 \sum_{i,j} \langle h_i \otimes x_i, h_j \otimes x_j\rangle$.

La matriz $h := (\langle h_i, h_j\rangle)_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ es positiva[7] y por lo tanto existe una matriz $a := (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $h = a^*a$. Luego $\sum_{i,j}\langle h_i \otimes x_i, h_j \otimes x_j\rangle = \sum_{i,j,k}\langle a_{ki}x_i, a_{kj}x_j\rangle$. Además la fórmula es válida si cambiamos x_i por Tx_i.

Definamos $y_i := \sum_k a_{ki}x_i$ e $y := (y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{X}^m$. Si $diag(T^*T) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\mathcal{X}))$ es la matriz diagonal que tiene a T^*T en cada entrada de la diagonal entonces

$$\sum_{i,j}\langle h_i \otimes Tx_i, h_j \otimes Tx_j\rangle = \langle diag(T^*T)y, y\rangle \leq \|T^*T\|\langle y, y\rangle = \|T\|^2 \sum_{i,j}\langle h_i \otimes x_i, h_j \otimes x_j\rangle.$$

Habiendo mostrado que ϕ está definida llamemos ρ a su restricción a $\mathbb{K}(\mathcal{X})$. Sin mayores dificultades puede mostrarse que ρ es equivariante respecto de γ^l y $1_{\mathcal{H}} \otimes \gamma$. También se cumple, para todo $t \in G$, que

$$\rho(\mathbb{K}(\mathcal{X})_t)(\mathcal{H} \otimes \mathcal{X}) = \mathcal{H} \otimes \mathbb{K}(\mathcal{X})_t\mathcal{X} = \mathcal{H} \otimes (\mathcal{X}_t) = (\mathcal{H} \otimes \mathcal{X})_t,$$

lo que nos dice que ρ es fuertemente no degenerado.

Los Corolarios del siguiente Teorema implican, en particular, lo siguiente: si γ es cuadrado integrable entonces γ^l y $1_{\mathcal{H}} \otimes \gamma$ lo son.

Para las acciones globales tanto el siguiente Teorema como sus Corolarios son debidos a Meyer [Mey, Mey01].

Teorema 4.47. *Dadas acciones parciales en módulos de Hilbert, γ y δ de G en $\mathcal{X}_A$ y $\mathcal{Y}_B$ respectivamente, y un homomorfismo fuertemente no degenerado y equivariante (respecto de γ^r y δ) $\phi\colon A \to \mathbb{B}(\mathcal{Y})$ se cumple que $\mathcal{X}_{si} \odot \mathcal{Y} \subset (\mathcal{X} \otimes_\phi \mathcal{Y})_{si}$. En particular $\gamma \otimes_\phi \delta$ es cuadrado integrable si γ lo es.*

Demostración. Para simplificar la notación llamaremos α a γ^r y β a δ^r. Sea $L^2_\delta(G, \mathcal{Y})$ el $A-$módulo de Hilbert obtenido luego de completar

$$C_c^\gamma(G, \mathcal{Y}) := \{f \in C_c(G, \mathcal{Y})\colon f(t) \in \mathcal{Y}_t \ \forall\ t \in G\}$$

con el producto interno $\langle f|g\rangle = \int_G \langle f(t)|g(t)\rangle\, dt$ (ver el Ejemplo 1.6). Afirmamos que existe un único unitario $U\colon L^2_\alpha(G, A) \otimes_\phi \mathcal{Y} \to L^2_\delta(G, \mathcal{Y})$ de manera que $U(f \otimes x)(t) = \phi(f(t))x$. En efecto, la igualdad

$$\langle f \otimes y|g \otimes y\rangle = \langle y|\pi(\langle f|g\rangle)x\rangle = \int_G \langle y|\pi(f(t)^*g(t))x\rangle = \int_G \langle \pi(f(t))y|\pi(g(t))x\rangle$$

[7] Porque para cualquier vector $\xi \in \mathbb{C}^n$ se cumple que $\langle h\xi, \xi\rangle \geq 0$.

implica que existe una única isometría lineal $U\colon C_c^{\alpha}(G,A)\odot\mathcal{Y}\to L^2_{\delta}(G,\mathcal{Y})$ tal que $U(f\otimes x)(t)=\phi(f(t))x$. Es evidente que $C_c(G)Im\ U\subset Im\ U$, además el hecho de que ϕ es fuertemente no degenerada implica que para cada $t\in G$ $\{f(t)\colon f\in Im\ U\}=\mathcal{Y}_t$, de lo que deducimos que ImU es densa en la topología del límite inductivo (Teorema A.5) y por lo tanto ImU es densa en $L^2_{\delta}(G,\mathcal{Y})$. Luego U tiene una única extensión a un unitario de $L^2_{\alpha}(G,A)\otimes_{\phi}\mathcal{Y}$ en $L^2_{\delta}(G,\mathcal{Y})$, que también llamaremos U.

Tomemos $x\in\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ e $y\in\mathcal{Y}$. Probaremos que $|x\otimes y\rangle\rangle\colon C_c^{\beta}(G,B)\to\mathcal{Y}$ tiene una extensión a un operador adjuntable de $L^2_{\beta}(G,B)$ en $\mathcal{Y}$. Haremos esto encontrando un operador adjuntable $T\colon L^2_{\beta}(G,B)\to L^2_{\gamma}(G,\mathcal{Y})$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^2_{\beta}(G,B) \arrow[r, "|x\otimes y\rangle\rangle"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{X}\otimes\mathcal{Y} \\
L^2_{\gamma}(G,\mathcal{Y}) \arrow[r, "U^*"'] & L^2_{\alpha}(G,A)\otimes\mathcal{Y} \arrow[u, "|x\rangle\rangle\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}"']
\end{tikzcd}\quad .$$

Definamos $\rho_y\colon C_c^{\beta}(G,B)\to C_c^{\delta}(G,\mathcal{Y})$ como $\rho_y(f)(t)=\delta_t(y\beta_{t^{-1}}(f(t)))$. Afirmamos que ρ_y tiene una extensión a un operador adjuntable. Para mostrar eso comencemos observando que dada $u\in C_c^{\gamma}(G,\mathcal{Y})$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\langle\rho_y(f)|u\rangle &= \int_G\langle\delta_t(y\beta_{t^{-1}}(f(t)))|u(t)\rangle\,dt=\int_G\beta_t(\langle y\beta_{t^{-1}}(f(t))|\delta_{t^{-1}}(u(t))\rangle)\,dt\\
&=\int_G f(t)^*\beta_t(\langle y|\delta_{t^{-1}}(u(t))\rangle)\,dt.
\end{aligned}$$

Luego el adjunto de ρ_y debería cumplir que ${\rho_y}^*(u)(t)=\beta_t(\langle y|\delta_{t^{-1}}(u(t))\rangle)$. Definamos $S(u)(t):=\beta_t(\langle y|\delta_{t^{-1}}(u(t))\rangle)$. Para mostrar que ρ_y es adjuntable basta mostrar que es acotado, ya que las fórmulas de arriba implicarán que S también es acotado y que es el adjunto de ρ_y.

Mostraremos que para cada $f\in C_c^{\beta}(G,B)$ se cumple que $\langle\rho_y(f)|\rho_y(f)\rangle\leq\|y\|^2\langle f|f\rangle$. Para esto necesitamos una unidad aproximada de $C_0^{\beta}(G,B)$, $\{e_i\}_i$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle\rho_y(f)|\rho_y(f)\rangle &= \int_G\langle\delta_t(y\beta_{t^{-1}}(f(t)))|\delta_t(y\beta_{t^{-1}}(f(t)))\rangle\,dt\\
&=\int_G\beta_t(\langle y\beta_{t^{-1}}(f(t))|y\beta_{t^{-1}}(f(t))\rangle)\,dt\\
&=\int_G\lim_i\beta_t(\langle ye_i(t^{-1})\beta_{t^{-1}}(f(t))|ye_i(t^{-1})\beta_{t^{-1}}(f(t))\rangle)\,dt\\
&=\int_G\lim_i f(t)^*\beta_t(\langle ye_i(t^{-1})|ye_i(t^{-1})\rangle)f(t)\,dt\\
&\leq\int_G\lim_i f(t)^*\beta_t(e_i(t^{-1})\langle y|y\rangle e_i(t^{-1}))f(t)\,dt\\
&\leq\|y\|^2\int_G\lim_i f(t)^*\beta_t(e_i(t^{-1})e_i(t^{-1}))f(t)\,dt=\|y\|^2\langle f|f\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora todo lo que nos resta por mostrar es que para toda $f \in C_c^\beta(G,B)$ se cumple que $|x\otimes y\rangle\rangle(f) = (|x\rangle\rangle \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{Y}})\circ U^*\circ \rho_y(f)$. Para esto necesitamos una manera de calcular $(|x\rangle\rangle \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{Y}})\circ U^*$ en $C_c^\delta(G,\mathcal{Y})$. Dados $v\in C_c^\alpha(G,A)$, $z\in\mathcal{Y}$ y una unidad aproximada de $C_c^\alpha(G,A)$, $\{e_i\}_i$, se cumple que

$$\begin{aligned}
|x\rangle\rangle \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(v\otimes z) &= \int_G \gamma_t(x\alpha_{t^{-1}}(v(t)))\otimes z\,dt = \int_G \lim_i \gamma_t(xe_i(t^{-1})\alpha_{t^{-1}}(v(t)))\otimes z\,dt\\
&= \int_G \lim_i \gamma_t(xe_i(t^{-1}))\otimes \phi(v(t))z\,dt\\
&= \int_G \lim_i (\gamma\otimes\delta)_t(x\otimes\phi(e_i(t^{-1}))\delta_{t^{-1}}(\phi(v(t))z))\,dt\\
&= \int_G (\gamma\otimes\delta)_t(x\otimes\delta_{t^{-1}}(U^*(v\otimes z)(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Ahora bien, ya que para cada $g\in C_c^\delta(G,\mathcal{Y})$ es posible encontrar un compacto $C\subset G$ y una sucesión $\{g_n\}_n\in C_c^\alpha(G,A)\otimes\mathcal{Y}$ tal que todos los elementos de $\{U^*(g_n)\}_n$ tienen soporte contenido en C, y esa sucesión converge uniformemente a g, deducimos que para toda $g\in C_c^\delta(G,\mathcal{Y})$ se tiene que

$$(|x\rangle\rangle \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{Y}})\circ U^*(g) = \int_G (\gamma\otimes\delta)_t(x\otimes\delta_{t^{-1}}(g(t))\,dt.$$

A partir de esa fórmula se deduce que para toda $f\in C_c^\beta(G,B)$

$$(|x\rangle\rangle \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{Y}})\circ U^*\circ\rho_y(f) = \int_G (\gamma\otimes\delta)_t(x\otimes y\beta_{t^{-1}}(f(t)))\,dt = |x\otimes y\rangle\rangle(f),$$

de lo que es evidente que $|x\otimes y\rangle\rangle$ es la restricción de un operador adjuntable. □

Corolario 4.48. *Si α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A, δ una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{Y}_B$ y $\phi\colon A\to\mathbb{B}(\mathcal{Y})$ es fuertemente no degenerado entonces $\phi(A_{si})\mathcal{Y}\subset\mathcal{Y}_{si}$. En particular δ es cuadrado integrable si α lo es.*

Demostración. Sea $V\colon A\otimes_\phi\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$ el único unitario tal que $V(a\otimes y)=\phi(a)y$. Es fácil mostrar que V es un isomorfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert. El Corolario 4.28 y el Teorema anterior implican que $V(A_{\mathrm{si}}\otimes\mathcal{Y})=\phi(A_{\mathrm{si}})\mathcal{Y}\subset\mathcal{Y}_{\mathrm{si}}$. □

Corolario 4.49. *Para cada acción parcial en módulos de Hilbert γ se cumple que γ es cuadrado integrable si y solamente si γ^l lo es.*

Demostración. Digamos que γ es una acción parcial de G en $\mathcal{X}_A$. Si γ es cuadrado integrable, como $\gamma^l=\gamma\otimes_\phi\widetilde{\gamma}$ (siendo $\phi\colon A\to\mathbb{B}(\widetilde{\mathcal{X}})=M(A)$ la inclusión canónica), el Teorema de arriba implica que γ^l es cuadrado integrable.

Recíprocamente, la inclusión canónica de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ en $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ es un $*-$homomorfismo fuertemente no degenerado y equivariante respecto de γ^l y γ. Por lo tanto γ es cuadrado integrable si γ^l lo es. $\square$

Ahora pasamos a estudiar las sumas directas de acciones parciales en módulos de Hilbert y su relación con las acciones parciales cuadrado integrables.

Teorema 4.50. *Sea J un conjunto no vacío, G un grupo HLC y $\{\gamma^j\}_{j\in J}$ una familia de acciones parciales en módulos de Hilbert, donde γ^j es una acción parcial de G en ${\mathcal{X}_j}_{A_j}$. Si $\boxplus_{j\in G}\gamma^j$ es la acción parcial definida en la Proposición 1.54 entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $\boxplus_{j\in G}\gamma^j$ es cuadrado integrable.

(II) Para todo $j\in J$, γ^j es cuadrado integrable.

Demostración. Asumamos que (I) es verdadera y tomemos $j \in J$. Llamemos $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{X}_j$ pensado dentro de la suma $\mathcal{X} := \boxplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$ y B a A_j pensado dentro de $A := \boxplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$. Luego B es un ideal de A y $\mathcal{X}B = \mathcal{Y}$. Además $\mathcal{Y}$ es $\gamma := \boxplus_{j\in G}\gamma^j-$invariante y $\gamma|_{\mathcal{Y}}$ es isomorfa a γ^j. Por otra parte $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}B$ es denso en $\mathcal{Y}$ y, por el Teorema 4.42, está contenido en $\mathcal{Y}_{\mathrm{si}}$. Luego γ^j es cuadrado integrable porque $\gamma|_{\mathcal{Y}}$ lo es.

Para mostrar el recírpoco definamos, para cada $j\in J$, $\iota_j\colon \mathcal{X}_j\to\mathcal{X}$ como $\iota_j(x)(k)=\delta_{j,k}x$. Probemos que $\iota_j({\mathcal{X}_j}_{\mathrm{si}})\subset\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$. Dado $x\in{\mathcal{X}_j}_{\mathrm{si}}$, $\xi\in\mathcal{X}$ y una unidad aproximada de $C_0^{\gamma^r}(G,A)$ contenida en $C_c^{\gamma^r}(G,A)$, $\{e_i\}_i$, definamos $f_i\colon G\to A_j$ como $f_i(t)=e_i(t)(j)$. Luego $\{f_i\}_i$ es una unidad aproximada de $C_0^{{\gamma^j}^r}(G,A)$ contenida en $C_c^{{\gamma^j}^r}(G,A)$.

Identifiquemos $L^2_{\gamma^r}(G,A)$ con $\boxplus_{k\in J}L^2_{{\gamma^k}^r}(G,A_k)$ canónicamente y sea $Q_j\colon L^2_{{\gamma^j}^r}(G,A_j)\to L^2_{\gamma^r}(G,A)$ la inclusión canónica. Luego $\{\langle\langle\iota_j(x)|_{e_i}\xi\}_i=\{Q_j(\langle\langle x|_{f_i}\xi(j))\}_i$ es convergente, por lo que $\iota_j(x)\in\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$.

Sabemos que $\sum_{k\in J}\iota_k(\mathcal{X}_j)$ es denso en $\mathcal{X}$. Luego $\sum_{k\in J}\iota_k({\mathcal{X}_j}_{\mathrm{si}})$ es denso en $\mathcal{X}$ y está contenido en $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$, lo que implica que $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es denso en $\mathcal{X}$. $\square$

Teorema 4.51. *Supongamos que G es un grupo HLC, J es un conjunto, $\{\gamma_j\}_{j\in J}$ es una familia de acciones parciales de G en $A-$módulos de Hilbert plenos y que ${\gamma^j}^r$ no depende de $j\in J$. Si $\gamma=\oplus_{j\in J}\gamma^j$ entonces las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

(I) γ es cuadrado integrable.

(II) Para cada $j\in J$ se cumple que γ^j es cuadrado integrable.

Demostración. Digamos que γ^j es una acción parcial en $\mathcal{X}_j$ y llamemos $\mathcal{X}$ a $\oplus_{j\in J}\mathcal{X}_j$. Supongamos que γ es cuadrado integrable y tomemos $j \in J$. La proyección canónica $P_j \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_j$ es adjuntable, un morfismo de acciones parciales y es sobreyectiva. Luego $P_j(\mathcal{X}_{\mathrm{si}}) \subset \mathcal{X}_{j\,\mathrm{si}}$ es denso en $\mathcal{X}_j$ y γ^j es cuadrado integrable.

Recíprocamente, para cada $j \in J$ se cumple $P_j{}^*(\mathcal{X}_{j\,\mathrm{si}}) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ y como $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es un subespacio tenemos $\sum_{j\in J} P_j{}^*(\mathcal{X}_{j\,\mathrm{si}}) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$. Además $\sum_{j\in J} P_j{}^*(\mathcal{X}_{j\,\mathrm{si}})$ es denso en $\mathcal{X}$ y por lo tanto γ es cuadrado integrable. $\square$

Definición 4.52. Supongamos que γ y δ son acciones parciales de G en módulos de Hilbert. Diremos que γ es un *sumando directo* de δ si (a) existe una acción parcial en módulos de Hilbert, ϱ, de manera que $\gamma^r = \varrho^r$ y (b) existe un isomorfismo de acciones parciales en módulos de Hilbert $\phi \colon \gamma \oplus \varrho \to \delta$.

Observación 4.53. Todo sumando directo de una acción parcial cuadrado integrable es cuadrado integrable.

Teorema 4.54. *Si γ y δ son acciones parciales en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{Y}_A$, respectivamente, y $\gamma^r = \delta^r$ entonces $\gamma \oplus \delta$ tiene una globalización si y solamente si γ y δ la tienen. Es más, en este último caso se cumple que si $(\gamma', \iota, \mathcal{Z}, \mathcal{X}')$ y $(\delta', \kappa, \mathcal{U}, \mathcal{Y}')$ son globalizaciones de γ y δ entonces $(\gamma' \oplus \delta', \iota \oplus \kappa, \mathcal{Z} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}')$ es una globalización de $\gamma \oplus \delta$.*

Demostración. Asumamos que $\varrho := \gamma \oplus \delta$ tiene una globalización. Sea $P \in \mathbb{B}(\varrho)$ la proyección $P(x \oplus y) = x \oplus 0$. El Teorema 1.88 nos dice que la restricción de ϱ a la imagen de P es una acción parcial que tiene una globalización. Esa acción parcial es isomorfa a γ, por lo que γ tiene una globalización. Para mostrar que δ tiene una globalización basta razonar análogamente con la proyección $I - P$.

Ahora nos ocuparemos en mostrar el recíproco. Asumamos que tenemos globalizaciones $(\gamma', \iota, \mathcal{Z}_B, \mathcal{X}')$ y $(\delta', \kappa, \mathcal{U}_C, \mathcal{Y}')$ de γ y δ respectivamente. Como γ'^r y δ'^r son globalizaciones de $\gamma^r = \delta^r$ podemos cambiar δ' por una acción isomorfa a ella de forma que $\gamma'^r = \delta'^r$, en particular $B = C$. Por otro lado podemos asumir directamente que $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$, $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}$, $\gamma'|_{\mathcal{X}} = \gamma$ y $\delta'|_{\mathcal{Y}} = \delta$; en cuyo caso ι y κ son simplemente las inclusiones canónicas. Pensando $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ como un subespacio de $\mathcal{Z} \oplus \mathcal{U}$ la prueba se reduce a mostrar que $\gamma' \oplus \delta'|_{\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}} = \gamma \oplus \delta$.

Para todo $t \in G$ tenemos que

$$\begin{aligned}[(\gamma' \oplus \delta')_t(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})] \cap (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) &= (\gamma'_t(\mathcal{X}) \oplus \delta'_t(\mathcal{Y})) \cap (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) \\ &= (\gamma'_t(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}) \oplus (\delta'_t(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{Y}) = (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})_t.\end{aligned}$$

Además para todo $x \oplus y \in (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})_{t^{-1}}$ es evidente que

$$(\gamma' \oplus \delta')_t(x \oplus y) = \gamma'_t(x) \oplus \delta'_t(y) = \gamma_t(x) \oplus \delta_t(y) = (\gamma \oplus \delta)_t(x \oplus y).$$

De lo anterior deducimos que $\gamma' \oplus \delta'|_{\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}} = \gamma \oplus \delta$. □

Observación 4.55. Si $(\gamma', \iota, \mathcal{Z}, \mathcal{X}')$ y $(\delta', \kappa, \mathcal{U}, \mathcal{Y}')$ son globalizaciones envolventes entonces $(\gamma' \oplus \delta', \iota \oplus \kappa, \mathcal{Z} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}')$ es envolvente. Esto se debe a que $[\gamma' \mathcal{X}'] \oplus [\delta' \mathcal{Y}']$ es denso en $\mathcal{Z} \oplus \mathcal{U}$ y está contenido en $[\gamma' \oplus \delta'(\mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}')]$.

Corolario 4.56. *Todo sumando directo de una acción parcial globalizable es globalizable.*

Demostración. Se deduce del Teorema anterior y del hecho de que tener globalizaciones es invariante por isomorfismos de acciones parciales en módulos de Hilbert. □

En lo que sigue denotaremos ℓ_2 al espacio de Hilbert formado por todas las sucesiones indexadas en los naturales de cuadrado sumable, es decir $L^2(\mathbb{N}, \nu)$ siendo ν la medida de conteo en $\mathbb{N}$.

Definición 4.57. Dada una acción parcial en C*-álgebras de G en A, α, si γ es la acción parcial definida por α en $L^2_\alpha(G, A)$; se define $\mathbb{N}L^2\alpha$ como la acción parcial $1_{\ell_2} \otimes \gamma$ de G en $H_\alpha := \ell_2 \otimes L^2_\alpha(G, A)$.

Del Ejemplo 4.6, del Teorema 4.29 y de los Corolarios del Teorema 4.47 deducimos que $\mathbb{N}L^2\alpha$ es cuadrado integrable independientemente de si α lo es.

4.5.1. El Teorema de estabilización de Kasparov

Básicamente el resultado que queremos mostrar establece que si γ es una acción parcial en un módulo de Hilbert separable entonces γ es cuadrado integrable si y solamente si es un sumando directo de $\mathbb{N}\gamma^r$. Para esto nos será extremadamente útil el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.58. *Supongamos que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$. Luego para cada $x \in \mathcal{X}$ se cumple que $x \in \overline{\operatorname{span}}\, \{|x\rangle\rangle(f) \colon f \in C_c^\alpha(G, A)\}$.*

Demostración. Fijemos $x \in \mathcal{X}$ y $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $a \in A$ tal que $\|x - xa\| < \varepsilon$. Sea $f \in C_c^\alpha(G, A)$ tal que $f(e) = a$ y para cada entorno compacto V de la identidad de $e \in G$ tomemos $\phi_V \in C_c(G)^+$ tal que: (i) $\operatorname{sop}(\phi_V) \subset V$ y (ii) $\int_G \phi_V(t)\, dt = 1$. Para cada V definamos $f_V \in C_c^\alpha(G, A)$ como $f_V(t) = \phi_V(t) f(t)$. Basta mostrar que existe V de manera que $\|xa - |x\rangle\rangle(f_V)\| < \varepsilon$.

Llamemos g a la función $G \to \mathcal{X},\ t \mapsto \gamma_t(x{\gamma^r}_{t^{-1}}(f(t)))$. Ya que g es continua y $g(e) = xa$ existe un entorno V de e de manera que $\|xa - g(t)\| < \varepsilon/2$ si $t \in V$. Luego

$$\begin{aligned}\|xa - |x\rangle\rangle(f_V)\| &= \|\int_G (xa - g(t))\phi_V(t)\,dt\| \leq \int_G \|xa - g(t)\|\phi_V(t)\,dt \\ &\leq \int_G \varepsilon\phi_V(t)/2\,dt < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Corolario 4.59. *En las hipótesis del Lema anterior para cada conjunto denso $D \subset \mathcal{X}$ se cumple que $\{|x\rangle\rangle(f) \colon x \in D,\ f \in C_c^\alpha(G, A)\}$ es denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Llamemos Y al conjunto de la tesis. El lema anterior implica que $D \subset \overline{Y}$ y por lo tanto $\mathcal{X} = \overline{D} = \overline{Y}$. □

El siguiente enunciado del Teorema de Estabilización de Kasparov es básicamente el enunciado del Teorema 8.5 de [Mey], que es un teorema sobre acciones globales en módulos de Hilbert. Antes de enunciarlo recordamos que el $A-$módulo de Hilbert $\mathcal{X}$ es *numerablemente generado* si existe un conjunto numerable $D \subset \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span}}\, DA$. Notemos que $DA \subset \overline{DA_{\mathcal{X}}}$, por lo que $\mathcal{X}$ es numerablemente generado si y solamente si existe un conjunto $D \subset \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span}}\, DA_{\mathcal{X}}$. Luego la propiedad de ser numerablemente generado es una propiedad de $\mathcal{X}$ en tanto C*-anillo ternario.

Teorema 4.60. *Supongamos que α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A, que γ es una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}_A$, que $\gamma^r = \alpha$ y que $\mathcal{X}$ es numerablemente generado. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) γ es cuadrado integrable.

(2) γ^l es cuadrado integrable.

(3) Existe un operador adjuntable y unitario $U \colon \gamma \oplus \mathbb{N}L^2\alpha \to \mathbb{N}L^2\alpha$.

(4) γ es un sumando directo de $\mathbb{N}L^2\alpha$.

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es exactamente el Corolario 4.49. Además es evidente que (3) implica (4) y la Observación 4.53 junto con el hecho de que $\mathbb{N}L^2\alpha$ es cuadrado integrable[8] nos dicen que (4) implica (1). Luego basta con mostrar que (1) implica (3). De acuerdo al Lema 1.68 es suficiente construir un operador adjuntable $T \colon \mathbb{N}L^2\alpha \to \gamma \oplus \mathbb{N}L^2\alpha$ de manera que T y T^* tengan rango denso.

[8] Ver los comentarios inmediatos siguientes a la Definición 4.57

Asumamos que γ es cuadrado integrable. Sea $D = \{v_1, v_2, \ldots\} \subset \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span}}\, DA$. Como $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es denso en $\mathcal{X}$, para cada $n, m \in \mathbb{Z}^+$ existe $y_{n,m} \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ tal que $\|v_n - y_{n,m}\| < 1/m$. Si $E := \{y_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}^+}$ entonces $\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span}}\, DA \subset \overline{\operatorname{span}}\, EA \subset \mathcal{X}$. Notemos que $\overline{\operatorname{span}}\, EA = \overline{\operatorname{span}}\,(E\backslash\{0\})A$, por lo que podemos asumir que E no contiene a 0. Digamos que $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$, lo cual es posible porque E es numerable. Sustituyendo x_n por $\||x_n\rangle\rangle\|^{-1}x_n$ podemos asumir que $\||x_n\rangle\rangle\| \le 1$ y que $\overline{\operatorname{span}}\, EA = \mathcal{X}$. Si ahora cambiamos la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ por $x_1, x_1, x_2, x_1, x_2, x_3, x_1, \ldots$ podemos asumir también que cada x_n aparece infinitas veces en $\{x_n\}_n$.

Los elementos de H_α son sucesiones $f = \{f_n\}_n$ tales que $f_n \in L^2_\alpha(G, A)$ y la suma $\sum_n \langle f_n, f_n\rangle$ es convergente[9] en A. Luego $\{\|f_n\|_n\}_n$ es una sucesión acotada y por lo tanto $\{\||x_n\rangle\rangle(f_n)\|\}_n$ también lo es. Lo anterior nos permite definir una función $T\colon H_\alpha \to \mathcal{X} \oplus H_\alpha$ como

$$T(\{f_n\}_n) = \sum_n 2^{-n}|x_n\rangle\rangle(f_n) \oplus \{4^{-m}f_m\}_m.$$

La adjunta de T debería ser la función $S\colon \mathcal{X} \oplus H_\alpha \to H_\alpha$ definida como

$$S(x \oplus \{f_n\}_n) = \{2^{-n}\langle\langle x_n|x + 4^{-n}f_n\}_n\,.$$

Notemos que $\{2^{-n}\langle\langle x_n|x + 4^{-n}f_n\}_n$ es un elemento de H_α ya que

$$\langle 2^{-n}\langle\langle x_n|x + 4^{-n}f_n, 2^{-n}\langle\langle x_n|x + 4^{-n}f_n\rangle \le 4^{-n}\|x\|^2 + 8^{-n+1}\|x\|\|f_n\| + 16^{-n}\|f_n\|^2.$$

Luego S está definida.

La igualdad $S = T^*$ se deduce de que para toda $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n \in H_\alpha$ y $x \in \mathcal{X}$ se cumple

$$\begin{aligned}\langle T(\{f_n\}_n), x \oplus \{g_n\}_n\rangle &= \sum_n 2^{-n}\langle |x_n\rangle\rangle(f_n), x\rangle + 4^{-n}\langle f_n, g_n\rangle \\ &= \sum_n \langle f_n, 2^{-n}\langle\langle x_n|x + 4^{-n}g_n\rangle \\ &= \langle \{f_n\}_n, S(x \oplus \{g_n\}_n)\rangle.\end{aligned}$$

Veamos que T es equivariante, sabemos que cada $|x_n\rangle\rangle$ es equivariante (Teorema 4.24) con respecto a la acción canónica en $L^2_\alpha(G, A)$, que llamaremos δ. Luego si $f = \{f_n\}_n \in L^2_\alpha(G, A)_{t^{-1}}$

[9] La sucesión de sumas parciales converge en A, no requerimos que la serie converja absolutamente.

$$
\begin{aligned}
T(\mathbb{N}L^2\alpha_t(f)) &= \sum_n 2^{-n}|x_n\rangle\rangle(\delta_t(f_n)) \oplus \{4^{-n}\delta_t(f_n)\}_n \\
&= \sum_n 2^{-n}\gamma_t(|x_n\rangle\rangle(f_n)) \oplus \{4^{-n}\delta_t(f_n)\}_n \\
&= (\gamma \oplus \mathbb{N}L^2\alpha)_t(T(f)).
\end{aligned}
$$

Probemos que S tiene rango denso viendo que el rango de S contiene a todas las sucesiones que se anulan a no ser en una cantidad finita de naturales, llamemos H_c a este subespacio de H_α. Si $f = \{f_n\}_n \in H_c$ entonces $g = \{4^n f_n\}_n \in H_c$ y $S^*(0 \oplus g) = f$.

Probemos que T tiene rango denso. Llamemos $\mathcal{Y}$ a la clausura del rango de T. El primer paso es mostrar que $\mathcal{X} \oplus 0 \subset \mathcal{Y}$. Dada $f \in L^2_\alpha(G, A)$ y un natural n llamemos $f\delta_n$ al elemento de H_α que vale cero a no ser en n, donde vale f. Luego $T(f\delta_n) = 2^{-n}|x_n\rangle\rangle(f) \oplus 4^{-n}f\delta_n$, de lo que deducimos que $|x_n\rangle\rangle(f) \oplus 2^{-n}f\delta_n \in \mathcal{Y}$ para todo n y todo f. Ya que cada x_m aparece infinitas veces en $\{x_n\}_n$ tenemos que $|x_m\rangle\rangle(f) \oplus 0 \in \mathcal{Y}$. Dados n, $f \in C_c^\alpha(G, A)$ y $a \in A$ notemos que si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $C_0^\alpha(G, A)$ contenida en $C_c^\alpha(G, A)$ entonces

$$
\begin{aligned}
|x_n\rangle\rangle(f)a &= \int_G \lim_i \gamma_t\left(x_n\gamma_{t^{-1}}(f(t)e_i(t))\right) a\, dt = \int_G \lim_i \gamma_t\left(x_n\gamma_{t^{-1}}(f(t))\right) e_i(t)a\, dt \\
&= \int_G \lim_i \gamma_t\left(x_n\gamma_{t^{-1}}(f(t)e_i(t)a)\right) dt = \int_G \gamma_t\left(x_n\gamma_{t^{-1}}(f(t)a)\right) dt \\
&= |x_n\rangle\rangle(fa) \in \mathcal{Y}.
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{Y}$ es un subespacio cerrado $\overline{\operatorname{span}}\,\{|x_n\rangle\rangle(f)a \oplus 0 \colon f \in L^2_\alpha(G, A),\ a \in A\} \subset \mathcal{Y}$, lo que junto con el Corolario anterior implica que $\mathcal{X} \oplus 0 = \overline{\operatorname{span}}\, EA \oplus 0 \subset \mathcal{Y}$. De lo expuesto hasta aquí deducimos que $0 \oplus f\delta_n = 2^n(|x_n\rangle\rangle(f) \oplus 2^{-n}f\delta_n - |x_n\rangle\rangle(f) \oplus 0) \in \mathcal{Y}$; luego $\mathcal{X} \oplus H_c \subset \mathcal{Y}$ e $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X} \oplus H_\alpha$. □

4.6. Globalizaciones

En la Sección 4.3 mostramos que toda acción parcial cuadrado integrable en un álgebra conmutativa tiene una globalización (envolvente), que también es cuadrado integrable. En completa generalidad (acciones parciales en módulos de Hilbert) esto es falso, sin embargo en muchas situaciones de interés el resultado es verdadero.

Comenzamos por dar un ejemplo general de acciones parciales (en módulos de Hilbert) cuadrado integrables que no tienen globalizaciones.

Ejemplo 4.7. Sea α una acción parcial en C*-álgebras, de G en A, no globalizable. Como módulo consideraremos $L^2_\alpha(G,A)$ con la acción parcial γ definida por α. El Teorema 4.29 nos dice que γ es cuadrado integrable. Sin embargo γ no tienen una globalización pues $\gamma^r = \alpha$ no la tiene.

En el Ejemplo anterior parece ser clave que $\gamma^l \neq \gamma \neq \gamma^r$. Esta diferencia entre las acciones derecha e izquierda de una acción parcial en módulos de Hilbert desaparece si el módulo es una C*-álgebra (considerada como módulo sobre sí misma). La pregunta sería ¿es verdad que toda acción parcial cuadrado integrable en una C*-álgebra tiene una globalización? Desafortunadamente no sabemos la respuesta en general, pero tenemos dos Teoremas que nos permiten suponer que la respuesta es afirmativa.

Observación 4.61. Toda acción parcial cuadrado integrable en una C*-álgebra conmutativa tiene una globalización (Lema 4.37).

Teorema 4.62. *Supongamos que G es un grupo discreto y α una acción parcial en C*-álgebras de G en A. Si α es cuadrado integrable entonces tiene una globalización.*

Demostración. El Teorema 3.2 nos da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una globalización de α.

Fijemos $a \in A_{\mathrm{si}}$, $b \in A$ y $t \in G$ y tomemos una unidad aproximada de $C_0^\alpha(G,A)$ contendida en $C_c^\alpha(G,A)$, $\{e_j\}_{j\in J}$. Definamos $d_j := \alpha_t(e_i(t)a^*)b$. Veamos que $\{d_j\}_{j\in J}$ es convergente. Basta con mostrar que es de Cauchy. Dados $i \leq j$ tenemos que

$$0 \leq (d_i - d_j)^*(d_i - d_j) \leq \langle\langle\langle a|_{e_i} b - \langle\langle a|_{e_j} b, \langle\langle a|_{e_i} b - \langle\langle a|_{e_j} b\rangle \leq \|\langle\langle a|_{e_i} b - \langle\langle a|_{e_j} b\|^2,$$

luego $\|d_i - d_j\| \leq \|\langle\langle a|_{e_i} b - \langle\langle a|_{e_j} b\|$, lo que implica que $\{d_j\}_{j\in J}$ es de Cauchy.

Sea $d := \lim_j d_j$. Ya que $\{e_j(t)\}_{j\in J}$ es una unidad aproximada de A_t, para todo $x \in A_t$ tenemos que

$$dx = \lim_j d_j x = \lim_j \alpha_t(e_i(t)a^*\alpha_{t^{-1}}(bx)) = \alpha_t(a^*\alpha_{t^{-1}}(bx)).$$

Hasta ahora hemos mostrado que para cada $a \in {A_{\mathrm{si}}}^*$, $b \in A$ y $t \in G$ existe un (único) $d \in A_t$ tal que $dx = \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(bx))$, para todo $x \in A_t$. Como ${A_{\mathrm{si}}}^*$ es denso en A, usando el Corolario 3.5 con $D = {A_{\mathrm{si}}}^*$ y $E = A$ deducimos que α tiene una globalización. $\square$

Recordemos que se dice que una C*-álgebra A es $\sigma-$unital si continene una sucesión acotada y creciente de elementos positivos, $\{a_n\}_n$, de forma que para todo $a \in A$ se cumple que $\lim_n \|a - aa_n\| + \|a - a_n a\| = 0$. Toda C*-álgebra separable es $\sigma-$unital y las siguientes afirmaciones son equivalentes

- A es $\sigma-$unital.
- Existe un elemento $a \in A^+$ tal que si ψ es un estado de A entonces $\psi(a) > 0$.
- A, como $A-$módulo de Hilbert, es numerablemente generado.

Demostrar la equivalencia entre estas afirmaciones no es una tarea simple. Quizás lo más difícil es mostrar que la segunda afirmación implica alguna de las otras dos. Para probar tal cosa referimos al lector al Lema 2.3 de [Bro77].

Teorema 4.63. *Si G es un grupo HLC, A una C*-álgebra $\sigma-$unital y α es una acción parcial en C*-álgebras cuadrado integrable de G en A, entonces α tiene una globalización.*

Demostración. Por el Teorema de Estabilización de Kasparov (4.60) podemos asumir que $\alpha \oplus \mathbb{N}L^2\alpha = \mathbb{N}L^2\alpha$ y $A \oplus H_\alpha = H_\alpha$. De la Sección 2.2 sabemos que si γ es la acción definida por α en $L^2_\alpha(G, A)$, entonces γ^l tiene una globalización. En el Ejemplo 4.6 construimos un $*-$homomorfismo fuertemente no degenerado y ($\gamma^l-\mathbb{N}L^2\alpha$-) equivariante $\rho\colon \mathbb{K}(L^2_\alpha(G, A)) \to \mathbb{B}(H_\alpha)$; en esta situación el Corolario 3.11 implica que $(\mathbb{N}L^2\alpha)^l$ tiene una globalización. Veamos que esto implica que α tiene una globalización.

Utilicemos la identificación

$$\mathbb{K}(A \oplus H_\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbb{K}(A) & \mathbb{K}(H_\alpha, A) \\ \mathbb{K}(A, H_\alpha) & \mathbb{K}(H_\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbb{K}(H_\alpha, A) \\ \mathbb{K}(A, H_\alpha) & \mathbb{K}(H_\alpha) \end{pmatrix}$$

y la proyección $p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{B}(\mathbb{N}L^2\alpha)$. El Corolario 1.89 nos dicen que $\mathbb{N}L^2\alpha^l|_{p\mathbb{K}(A\oplus H_\alpha)p}$ es una acción parcial en módulos de Hilbert que admite una globalización. Veamos que con la identificación canónica $A = p\mathbb{K}(A \oplus H_\alpha)p$, la restricción $\mathbb{N}L^2\alpha^l|_{p\mathbb{K}(A\oplus H_\alpha)p}$ se identifica con α. Tomemos $a \in A_{t^{-1}}$ y pensemos $a \in \mathbb{K}(A \oplus H_\alpha)$. Podemos encontrar $c, d \in A_{t^{-1}}$ de manera que $a = bc^*$, o sea que a es el operador $|b\rangle\langle c|\colon A \to A$. Luego

$$\mathbb{N}L^2{\alpha^l}_t(a) = \mathbb{N}L^2{\alpha^l}_t\left(|b \oplus 0\rangle\langle c \oplus 0|\right) = |\alpha_t(b) \oplus 0\rangle\langle\alpha_t(c) \oplus 0| = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_t(bc^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \alpha_t(a).$$

De esto deducimos que α tiene una globalización como acción parcial en módulos de Hilbert, el Corolario 1.83 nos dice que también la tiene como acción parcial en C*-álgebras. $\square$

4.7. Álgebras con unidad

Es un hecho conocido -que mostraremos a continuación- que sólo los grupos compactos admiten acciones globales cuadrado integrables en C*-álgebras con unidad. Para explicar por qué sucede esto supongamos que A es una C*-álgebra con unidad 1 y que α es una acción parcial cuadrado integrable de G en A.

Observación 4.64. En la situación anterior $A_{\text{si}} = A$. En efecto, como A_{si} es denso y A tiene unidad (1) A_{si} debe tener algún elemento invertible, digamos a. Luego $1 = aa^{-1} \in A_{\text{si}}A \subset A_{\text{si}}$ y por lo tanto para todo $b \in A$ se tiene que $b = 1b \in A_{\text{si}}$.

En caso que α sea global, para cada $g \in C_c(G)^+$ tenemos que $\langle\langle 1|_g 1(t) = g(t)1$, por lo tanto la definición de elemento cuadrado integrable implica que $\|\langle\langle 1|1\| = \int_G 1\, dt 1 < \infty$. Entonces la medida de Haar de G es finita y por lo tanto G es compacto.

Volvamos al caso en que α es parcial y cuadrado integrable, manteniendo A con unidad. El conjunto $G_0 := \{t \in G \colon A_t = A\}$ es abierto porque, si U es el conjunto de los elementos invertibles de A, entonces U es abierto en A y $G_0 = \{t \colon A_t \cap U \neq \emptyset\}$ pues cada A_t es un ideal de A. Esto implica que $H := G_0 \cap {G_0}^{-1}$ es abierto en G. En caso que α es global es evidente que $H = G$ y en general H es un subgrupo de G. Para mostrar esto observemos que $e \in H$ y que si $t \in H$ entonces $t^{-1} \in H$. Por otro lado, si $s, t \in H$ entonces $A_s = A_t = A_{s^{-1}} = A_{t^{-1}} = A$, con lo cual $\alpha_t \circ \alpha_s \colon A \to A$. Como α_{ts} es una extensión de $\alpha_t \circ \alpha_s$ debe ser $A_{ts} = A_{(ts)^{-1}} = A$, con lo cual $ts \in H$.

Veamos ahora que $\beta := (\{\alpha_t\}_{t\in H}, \{A_t\}_{t\in H})$ es una acción global cuadrado integrable de H en A. Es fácil, si no inmediato, verificar que β es una acción global en C*-álgebras. Para mostrar que β es cuadrado integrable observamos que, dado que H es abierto y cerrado en G, podemos pensar $C_c(H, A) \subset C_c^\alpha(G, A)$, con lo cual identificamos a $L^2(H, A)$ con la clausura de $C_c(H, A)$ en $L^2_\alpha(G, A)$. Además existe un único operador $P \in \mathbb{B}(L^2_\alpha(G, A), L^2(H, A))$ tal que $Pf = f|_H$, para todo $f \in C_c^\alpha(G, A)$. Un cálculo directo muestra que para cada $a \in A = A_{\text{si}}^\alpha$ el operador $\langle\langle a|^\alpha \circ P^*$ es una extensión de $\langle\langle a|^\beta \colon C_c(H, A) \to A$, por lo que $A^\beta_{\text{si}} = A$.

Por lo visto anteriormente H debe ser compacto. De la discusión anterior deducimos que: si α es una acción parcial en C*-álgebras y cuadrado integrable de G en A, A con unidad, entonces $H = \{t \in G \colon A_t = A = A_{t^{-1}}\}$ es un subgrupo compacto de G. En particular no existen acciones globales cuadrado integrables de grupos no compactos en álgebras con unidad; así como tampoco existen acciones parciales cuadrado integrables de grupos conexos no compactos en álgebras con unidad. Sin embargo los razonamientos anteriores no pueden pulirse hasta mostrar que no existen acciones parciales propias de grupos no compactos en álgebras unitales, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8. Sea G un grupo discreto y tomemos un conjunto finito y no vacío con n elementos, $X \subset G$. Consideremos en X la topología discreta y llamemos σ a la restricción a X de la acción por traslación a izquierda. Esto es: $X_t = X \cap tX$ y $\sigma_t(x) = tx$. Esta acción parcial es propia ya que su globalización (la traslación a izquierda en G) es propia. Luego la acción parcial definida por σ en $C(X) = \mathbb{C}^n$ es cuadrado integrable, siendo $C(X)$ un álgebra con unidad. El producto cruzado (pleno y reducido) de esta acción parcial es el álgebra de las matrices complejas $n \times n$ y el espacio de órbitas contiene un único punto.

Veamos dos construcciones que nos permiten obtener más acciones parciales propias en espacios compactos.

Producto cartesiano

Tomemos dos acciones HLC, σ y τ, de un grupo G en espacios X e Y, respectivamente. En $Z := X \times Y$ definamos la acción $\sigma \times \tau$ (el producto cartesiano de σ y τ) de la siguiente manera: para cada $t \in G$ se define $(\sigma \times \tau)_t \colon X_{t^{-1}} \times Y_{t^{-1}} \to X_t \times Y_t$ como $(\sigma \times \tau)_t(x, y) = (\sigma_t(x), \tau_t(y))$. En lo que sigue escribimos Z_t en lugar de $X_t \times Y_t$.

Lema 4.65. *El producto cartesiano $\upsilon := \sigma \times \tau$ es una acción parcial HLC.*

Demostración. La prueba de que υ es una acción parcial en conjuntos es directa y se deja al lector. Para mostrar que el dominio de υ, $\Gamma_\upsilon = \{(t, x, y) \colon x \in X_{t^{-1}},\ y \in Y_{t^{-1}}\}$, es abierto en $G \times Z = G \times X \times Y$ llamemos Γ_σ y Γ_τ a los dominios de σ y τ. Sean $u \colon G \times X \times Y \to G \times X,\ (t, x, y) \mapsto (t, x)$ y $v \colon G \times X \times Y \to G \times Y,\ (t, x, y) \mapsto (t, y)$ las proyecciones canónica. Ambas son continuas y ello implica que $\Gamma_\upsilon = u^{-1}(\Gamma_\alpha) \cap v^{-1}(\Gamma_\tau)$ es abierto en $G \times Z$. La continuidad de $\Gamma_\upsilon \to Z,\ (t, x, y) \mapsto \upsilon_t(x, y) = (\sigma_t(x), \tau_t(y))$ se deduce directamente de que σ y τ son acciones parciales continuas. □

Observemos que el homeomorfismo canónico $h \colon X \times Y \to Y \times X$, $h(x, y) = (y, x)$, es un isomorfismo de acciones parciales HLC entre $\sigma \times \tau$ y $\tau \times \sigma$. De esto deducimos que el rol de σ y τ es intercambiable en el siguiente resultado.

Lema 4.66. *Si σ tiene gráfico cerrado (es decir que tiene una globalización) y τ es propia entonces $\upsilon := \sigma \times \tau$ es propia.*

Demostración. Con la notación del lema anterior tomemos una red $\{(t_i, x_i, y_i)\}_i$ contenida en Γ_υ de manera que $\{(x_i, y_i, \upsilon_{t_i}(x_i, y_i))\}_i$ está contenida en un compacto $C \subset Z \times Z$. Basta encontrar una subred de la primer red que converja a un punto de Γ_υ (Lema 4.11).

De las condiciones anteriores deducimos que $\{(y_i, \tau_{t_i}(y_i))\}_i$ está contenida en un conjunto compacto. Luego, como τ es propia, existe una subred $\{(y_{i_j}, \tau_{t_{i_j}}(y_{i_j}))\}_j$ convergente a un punto $(t, y) \in \Gamma_\tau$.

Pasando a una subred podemos asumir que $\{(t_{i_j}, x_{i_j}, \sigma_{t_{i_j}}(x_{i_j}))\}_j$ converge a un punto (t, x, x'). Ya que σ tiene gráfico cerrado tenemos que $(t, x) \in \Gamma_\sigma$.

Las conclusiones finales de los últimos párrafos implican que $\{(t_{i_j}, x_{i_j}, y_{i_j})\}_j$ converge a (t, x, y) y que $(t, x, y) \in \Gamma_\upsilon$. Esto es todo lo que queríamos mostrar. $\square$

Ejemplo 4.9. Sean G, X y σ como en el Ejemplo 4.8 y tomemos un espacio compacto Hausdorff Y (cualquiera) y sea τ la acción global trivial de G en Y. Luego $\sigma \times \tau$ es propia y $Z = X \times Y$ es compacto y Hausdorff.

Unión disjunta

Volvamos a considerar G, σ, τ, X e Y de manera completamente general (σ y τ son acciones parciales HLC) pero esta vez definamos $Z := X \sqcup Y$ (la unión disjunta) con la topología cuyos abiertos son de la forma $U \sqcup V$, siendo U abierto de X y V abierto de Y. Definamos la unión disjunta de σ y τ, $\sigma \sqcup \tau$, como la acción parcial tal que para cada $t \in G$ la función $(\sigma \sqcup \tau)_t \colon X_{t^{-1}} \sqcup Y_{t^{-1}} \to X_t \sqcup Y_t$ coincide con σ_t en $X_{t^{-1}}$ y con τ_t en $Y_{t^{-1}}$.

Lema 4.67. *La unión disjunta de σ y τ, $\upsilon := \sigma \sqcup \tau$, es una acción parcial HLC.*

Demostración. Sean $\Theta(\sigma)$ y $\Theta(\tau)$ las acciones parciales definidas por σ y τ en $C_0(X)$ y $C_0(Y)$, respectivamente. Identificando $C_0(X \sqcup Y) = C_0(X) \boxplus C_0(Y)$ la Proposición 1.54 y los comentarios de la Sección 1.3.1 nos dan una acción parcial ϱ de G en $X \sqcup Y$ de forma que $\Theta(\varrho) = \Theta(\gamma) \boxplus \Theta(\delta)$. Es fácil mostrar que $\varrho_t = (\sigma \sqcup \tau)_t$, lo cual implica que $\sigma \sqcup \tau$ es una acción parcial HLC. $\square$

Dependiendo de cómo definamos (formalmente) la unión disjunta tendremos que $\sigma \sqcup \tau = \tau \sqcup \sigma$ o que $\sigma \sqcup \tau$ es isomorfa como acción parcial a $\tau \sqcup \sigma$. Nosotros optamos por la igualdad.

Lema 4.68. *La unión disjunta de σ y τ es propia si y solamente si σ y τ son propias.*

Demostración. El Teorema 4.50 junto con la demostración del Lema anterior nos dice que $\Theta(\sigma \sqcup \tau)$ es cuadrado integrable si y solamente si $\Theta(\sigma)$ y $\Theta(\tau)$ son cuadrado integrables. Luego los resultados de la sección 4.3.1 implican la tesis de este Lema. $\square$

Tomando uniones disjuntas de acciones parciales como la construida en el Ejemplo 4.9 obtenemos nuevas acciones parciales propias en espacios compactos. Para ciertos grupos estas son todas (a menos de isomorfismos).

En términos de la teoría de categorías las construcciones previas son el producto y el coproducto.

Descomposición de (algunas) acciones parciales propias en compactos

Para enunciar con precisión nuestro próximo resultado supongamos que G es un grupo discreto y σ una acción parcial HLC de G en X.

Definición 4.69. Diremos que σ es un *bloque fundamental* si $\sigma = \tau \times \upsilon$ siendo: τ una acción global trivial de G en un espacio Hausdorff compacto, y υ la restricción a un conjunto finito $F \subset G$ de la traslación a izquierda de G.

Definición 4.70. Diremos que σ es un *ejemplo básico* si es una unión disjunta de una cantidad finita de bloques fundamentales.

Sabemos que todo ejemplo básico es una acción parcial propia en un espacio compacto. Nos interesa mostrar lo siguiente:

Teorema 4.71. *Si G es un grupo discreto libre de torsión entonces toda acción parcial propia de G en un espacio compacto y Hausdorff es isomorfa a un ejemplo básico.*

Recordemos que el *orden* del elemento $g \in G\backslash\{e\}$ es el mínimo de $\{n \in \mathbb{Z}^+ : g^n = e\}$ en caso que ese conjunto sea no vacío, y es infinito en otro caso. El grupo G es *libre de torsión* si todo elemento $g \in G\backslash\{e\}$ tiene orden infinito. También en este punto es conveniente recordar la definición de estabilizador y de acción parcial libre así como sus consecuencias inmediatas (Definición 1.12 y discusión siguiente a ella).

La definición de acción parcial implica, directamente, que todo estabilizador es un subgrupo. Además el estabilizador no cambia si lo calculamos con respecto a la globalización envolvente (en tanto acción parcial en conjuntos). En caso de que σ sea una acción parcial HLC propia cada estabilizador es compacto porque, con la notación de la Sección 4.1, el estabilizador de x es $((\{x\},\{x\}))$.

Lema 4.72. *Dado un grupo discreto G las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Toda acción parcial HLC y propia de G es libre.

(2) Toda acción global HLC y propia de G es libre.

(3) G no tiene subgrupos finitos no triviales.

(4) G es libre de torsión.

Demostración. Si G tiene un elemento $t \neq e$ de orden finito entonces $\{t^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo finito no trivial. Recíprocamente, si H es un subgrupo finito y no nulo entonces todo $t \in H\backslash\{e\}$ tiene orden finito. Hemos mostrado que (3) es equivalente a (4). Por otra parte es evidente que (1) implica (2).

Supongamos que G tiene un subgrupo finito y no trivial H. Sea σ la acción de G en las coclases $X = \{tH : t \in G\}$, es decir $\sigma_s(tH) = stH$, considerando en X la topología discreta. Esta acción es propia y el estabilizador de la coclase H es H, de modo que la acción es propia pero no libre. Hemos mostrado que (2) implica (3).

Si G admite una acción parcial propia pero no libre, σ de G en X, entonces existe un elemento $x \in X$ tal que $G_x \neq \{e\}$. Como σ es propia G_x es compacto y por lo tanto finito. Esto muestra que (3) implica (1). □

Lema 4.73. *Supongamos que G es un grupo discreto libre de torsión y que X es un un conjunto finito con la topología discreta. Luego se cumple que*

(I) Si σ es una acción parcial de G en X entonces σ es libre $\Leftrightarrow$ σ es propia.

(II) Si σ es una acción parcial libre (o propia) de G en X entonces existe un conjunto finito $F \subset G$ de manera que σ es isomorfa a la restricción a F de la traslación a izquierda de G.

Demostración. El recíproco de (I) se deduce del Lema anterior. Para mostrar el directo de (I) observamos que la topología de $G \times X$ es la discreta, por lo que para mostrar que σ es propia basta con mostrar que su dominio, Γ_σ, es finito. Si Γ_σ no es finito entonces existe una sucesión $\{(t_n, x_n)\}_n \subset \Gamma_\sigma$ sin elementos repetidos. Dado que X es finito algún $x \in X$ aparece infinitas veces en la segunda coordenada de la sucesión, por lo que podemos asumir que $\{x_n\}_n$ es constante y que $t_n \neq t_m$ si $n \neq m$. Por otro lado $\{\sigma_{t_n}(x_n)\}_n$ es una sucesión de X, por lo que tiene una subsucesión constante. Pasando a esa subsucesión podemos asumir que: $x_n = x$ y $\sigma_{t_n}(x) = y$, para todo n, y que $t_n \neq t_m$ si $n \neq m$. Dado que σ es una acción parcial tenemos que $\{t_m{}^{-1}t_n : n, m > 0\}$ está contenida en el estabilizador de x, lo cual es absurdo porque σ es libre.

Para demostrar (II) llamemos υ a la traslación a izquierda de G y tomemos una envolvente de σ, τ, que es libre y propia porque σ lo es. Llamemos Y al espacio envolvente, pensamos X como abierto de Y y $\tau|_X = \sigma$. Esto implica que Y tiene la topología discreta.

Observemos que la $\sigma-$órbita de cada $x \in X$ es la intersección de su $\tau-$órbita con X : $\sigma x = X \cap \tau x$. Entonces si X es unión disjunta de $\sigma-$órbitas disjuntas, $X = \sigma x_1 \cup \cdots \cup \sigma x_n$, tendremos que $Y = \tau x_1 \cup \cdots \cup \tau x_n$ (estas órbitas también son disjuntas). La prueba será por inducción en n.

Supongamos que $n = 1$, es decir que $X = \sigma x_1$. Luego $Y = \tau x_1$. Veamos que τ es la traslación a izquierda en G. Definamos $f : G \to Y$ como $f(t) = \tau_t(x_1)$. Es evidente que

f es sobreyectiva y un morfismo de acciones. También es inyectiva pues si $f(t) = f(r)$ entonces $t^{-1}r \in G_{x_0} = \{e\}$, lo que implica que $t = r$. Luego $\sigma = \tau|_X$ es isomorfa a $\upsilon|_{f^{-1}(X)}$.

Asumamos que la tesis es válida cuando X tiene como máximo $n-1$ órbitas. Definamos $X_0 := \sigma x_1 \cup \cdots \cup \sigma x_{n-1}$ y $X_1 = \sigma x_n$. Luego existen conjuntos finitos $P, Q \subset G$ e isomorfismos de acciones parciales $g\colon \sigma|_{X_0} \to \upsilon|_P$ y $h\colon \sigma|_{X_1} \to \upsilon|_Q$.

Afirmamos que existe $t \in G$ tal que $Qt \cap P = \emptyset$. En caso contrario $G = Q^{-1}P$ es un conjunto finito y por lo tanto tiene elementos de orden finito, lo que es absurdo. Tomemos entonces t tal que $Qt \cap P = \emptyset$ y con él definamos $u\colon Q \to Qt,\ u(s) = st$. Es fácil mostrar que u es un isomorfismo entre $\upsilon|_Q$ y $\upsilon|_{Qt}$, por lo que podemos asumir (cambiando Q por Qt) que $Q \cap P = \emptyset$.

Definamos $f\colon X \to F := Q \cup P$ de manera que coincide con g en X_0 y con h en X_1. Es fácil verificar que f es un isomorfismo de acciones parciales entre σ y $\upsilon|_F$. □

La acción parcial que describimos a continuación juega un papel fundamental en nuestra descomposición. Esta acción se describe en la Sección 3.3 de [Aba03].

Sea $2^G = \Pi_{t\in G}\{0,1\}$ el conjunto de partes[10] de G equipado con la topología producto. La acción de G en 2^G se define como $t \cdot U = tU$. No estamos tan interesados en esta acción como en su restricción al abierto compacto $2^G_e := \{U \in 2^G : e \in U\}$. Llamemos ϱ a esa restricción.

Lema 4.74. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ subconjuntos finitos de G que contienen a e, y sea X la $\varrho-$órbita de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ equipado con la topología relativa a 2^G. Luego X es finito, la topología de X es la discreta y la restricción de ϱ a X es una acción parcial propia.*

Demostración. Veamos que X es finito. Si $y \in X$ entonces existen $t \in G$ y x_j tales que $x_j \in 2^G_{t^{-1}}$ e $y = \varrho_t(x_j)$. Pero $2^G_{t^{-1}} = 2^G_e \cap t^{-1} \cdot 2^G_e = \{U \in 2^G : e, t^{-1} \in U\}$, lo que implica que $t^{-1} \in x_j$. Luego $X = \{tx_j : t \in {x_j}^{-1},\ j = 1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito. La topología de X es la discreta ya que 2^G_e es de Hausdorff.

Del Lema 4.11 y del hecho de que $X \times X$ es finito y tiene la topología discreta, deducimos que para mostrar que $\varrho|_X$ es propia basta con ver que $((\{x_i\}, \{x_j\}))$ es finito $(i, j = 1, \ldots, n)$. Lo cual es inmediato pues $((\{x_i\}, \{x_j\})) \subset {x_i}^{-1}$. □

Demostración del enunciado 4.71. Recordemos que G es un grupo discreto y libre de torsión y tomemos una acción parcial propia, σ, de G en un compacto y Hausdorff X.

[10] El subconjunto U de G se representa por la función indicador de U.

La prueba consiste en encontrar una partición de X en abiertos y cerrados $\sigma-$invariantes, $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, de manera que las restricciones $\sigma|_{X_i}$ son isomorfos a bloques básicos.

Ya que σ tiene una globalización propia podemos asumir lo siguiente: existen un espacio HLC Y y una acción global y propia σ^e de G en Y de manera que (i) X es abierto en Y, (ii) $\sigma^e X = Y$ y (iii) $\sigma = \sigma^e|_X$. Esto implica que $X_t = \sigma^e_t(X) \cap X$ y por lo tanto $((X, X)) = \{t \in G \colon \sigma^e_t(X) \cap X \neq \emptyset\} = \{t \in G \colon X_t \neq \emptyset\} =: G_0$ es un conjunto compacto, es decir finito. Por otro lado X es cerrado en Y pues es compacto y eso implica que $X_t = \sigma^e_t(X) \cap X$ es cerrado en X.

Definamos $F \colon X \to 2^G_e$ como $F(x) = \{t \in G \colon x \in X_t\} \subset G_0$. En otras palabras $F(x) = \{t \in G \colon \sigma^e_{t^{-1}}(x) \in X\}$. La imagen de F consta de (algunos) subconjuntos de G_0 y por lo tanto ImF es finita. Mostrar que F es continua equivale a mostrar que es localmente constante, lo cual es verdad pues dado $x \in X$, F es constante en $(\cap_{t\in F(x)} X_t) \cap (\cap_{t\in G_0 \setminus F(x)} X \setminus X_t)$.

Recordemos que llamábamos ϱ a la acción parcial de G en 2^G_e dada por $\varrho_t(U) = tU$. Afirmamos que F es un morfismo de acciones parciales. En efecto, si $x \in X_{t^{-1}}$ es evidente que $e, t^{-1} \in F(x)$, lo que nos dice que $F(X_{t^{-1}}) \subset 2^G_{t^{-1}}$. Por otra parte, si $x \in X_{t^{-1}}$, se tiene $s \in F(x)$ sii $x \in X_{t^{-1}} \cap X_s$ sii $\sigma_t(x) \in X_t \cap X_{ts}$ sii $ts \in F(\sigma_t(x))$; y esto nos dice que $F(\sigma_t(x)) = \varrho_t(F(x))$.

Llamemos P a la imagen de F (que es finita). Del párrafo anterior deducimos que $f \colon X \to \varrho|_P$ es un morfismo de acciones parciales. Veamos que P es ϱ invariante. En efecto, si $p \in P \cap 2^G_{t^{-1}}$ entonces existe $x \in X$ tal que $p = F(x)$ y $t^{-1}, e \in F(x) = p$. Esto significa que $x \in X_{t^{-1}}$ y por lo tanto $\varrho_t(p) = F(\sigma_t(x)) = tF(x) \in P$. Ya que P es ϱ invariante, la restricción $\varrho|_P$ es una acción parcial de las construidas en el Lema 4.74. Luego el Lema 4.73 implica que existen un conjunto finito $Q \subset G$ y una función $f \colon P \to Q$ de manera que si τ es la restricción a Q de la traslación a izquierda de G, entonces $f \colon \varrho|_P \to \tau$ es un isomorfismo de acciones parciales.

Tomemos la partición de Q en $\tau-$órbitas: $Q = \tau q_1 \sqcup \cdots \sqcup \tau q_n$, y definamos $g := f \circ F \colon \sigma \to \tau$. Puesto que g es continua y su codominio es finito, si definimos $X_i := g^{-1}(\tau q_i)$, entonces $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es una partición de X en abiertos compactos no vacíos. Veamos que cada X_i es $\sigma-$invariante. Primero conviene observar que si $p_i = f^{-1}(q_i)$ entonces $X_i = F^{-1}(\varrho p_i)$. Luego cada X_i es $\sigma-$invariante porque F es un morfismo de acciones parciales y cada X_i es la preimagen de un conjunto invariante.

Para terminar nos basta mostrar que cada $\sigma|_{X_i}$ es isomorfo a un bloque fundamental; luego podemos asumir que $X = X_1$, es decir que Q tiene una única órbita: $Q = \tau q$.

Sean $Z := g^{-1}(q)$, υ la acción global trivial de G en Z y $p = f^{-1}(q)$, de manera que $Z = F^{-1}(p)$. Afirmamos que σ es isomorfa a $\upsilon \times \tau$ (que es un bloque fundamental). Puesto que τ es isomorfa a $\varrho|_P$ basta mostrar que σ es isomorfa a $\upsilon \times \varrho|_P$. De ahora en más llamaremos τ a $\varrho|_P$, o sea que mediante el isomorfismo f pensamos $Q = P$ y $p = q$. En ese caso $g = f \circ F = F$.

Puesto que Q es discreto y F continua, Z es abierto y cerrado y por lo tanto compacto. La $\sigma-$órbita de cada $x \in X$ corta a Z en un único punto pues: (a) existe $t \in G$ tal que $p \in P_{t^{-1}}$ y $tp = \tau_t(p) = F(x)$, luego $t = te \in F(x)$ y $F(\sigma_{t^{-1}}(x)) = t^{-1}F(x) = p$ por lo que $\sigma_{t^{-1}}(x) \in \sigma x \cap Z$ y (b) si $y, z \in \sigma x \cap Z$ entonces existen $s, t \in G$ tales que $x \in X_{s^{-1}} \cap X_{t^{-1}}$, $\sigma_s(x) = y$ y $\sigma_t(x) = z$; luego $sF(x) = F(y) = p = F(z) = tF(x)$ y $t^{-1}s \in G_{F(x)}$ lo que implica $t = s$ e $y = z$.

Sea $h\colon X \to Z$ la única función tal que $\{h(x)\} = \sigma x \cap Z$. Esta función es continua pues si para cada $x \in X$ tomamos $t \in G$ tal que $x \in X_{t^{-1}}$ y $\sigma_t(x) \in Z$, entonces h coincide con σ_t en $\sigma_{t^{-1}}(X_t \cap Z)$, que es un entorno abierto de x pues Z es abierto.

Para terminar mostraremos que $u\colon X \to Z \times P,\ u(x) = (h(x), F(x))$, es un isomorfismo de acciones parciales continuas entre σ y $\upsilon \times \tau$. Ya sabemos que las coordenadas de u son continuas y por lo tanto h es continua. Además, dado $t \in G$, sabemos que $u(X_{t^{-1}}) \subset Z \times (P_{t^{-1}}) = (Z \times P)_{t^{-1}}$. Si $x \in X_{t^{-1}}$, como h es constante en las órbitas y $F\colon \sigma \to \tau$ es un morfismo de acciones parciales, se tiene que $u(\sigma_t(x)) = (h(\sigma_t(x)), F(\sigma_t(x))) = (h(x), \tau_t(F(x))) = (\upsilon \times \tau)_t(u(x))$.

Para terminar la prueba basta con mostrar que $u(X_t) \supset Z \times Y_t$, para todo $t \in G$, y que h es inyectiva[11]. Comencemos por lo primero. Dado $(y, z) \in Z \times P_t$ sabemos que $t \in z$ (i.e. $z \in P_t$) y que existe $r \in p^{-1} = F(y)^{-1}$ tal que $rp = z$. Luego $u(\sigma_r(y)) = (h(\sigma_r(y)), F(\sigma_r(y))) = (y, rF(y)) = (y, z)$; además $rp = z \in P_t$, lo que implica que $r^{-1}t \in p = F(y)$. Luego $\sigma_r(y) \in \sigma_r(X_{r^{-1}} \cap X_{r^{-1}t}) = X_r \cap X_t$ y $\sigma_r(y) \in X_t$, de lo que deducimos que $(y, z) = u(\sigma_r(y)) =\in u(X_t)$.

Por último mostraremos que u es inyectiva. Si $u(x) = u(y)$ entonces $h(x) = h(y)$, lo que nos dice que $\sigma x = \sigma y$ y que existe $t \in G$ de manera que $x \in X_{t^{-1}}$ y $\sigma_t(x) = y$. Luego $F(x) \in P_{t^{-1}}$ y $\tau_t(F(x)) = F(\sigma_t(x)) = F(y) = F(x)$, lo que implica que t es un elemento del estabilizador de $F(x)$, el cual es trivial. Entonces $t = e$ y $x = \sigma_t(x) = y$. $\square$

[11]Con lo anterior tenemos que u es biyectiva entre espacios Hausdorff compactos y por lo tanto un homeomorfismo.

4.7.0.1. Descomposición en álgebras no conmutativas con unidad

En una versión "no conmutativa" del Teorema 4.71 las uniones disjuntas son reemplazadas por sumas directas y el producto de acciones por producto tensorial. Para describir estas construcciones fijemos dos acciones parciales en C*-álgebras, α y β, de un grupo G en C*-álgebras A y B, respectivamente.

La suma directa externa $\alpha \boxplus \beta$ es una acción parcial que será cuadrado integrable si y solamente si α y β lo son (Teorema 4.50).

Por otro lado consideremos el producto tensorial algebraico $C = A \odot B$. Para cada $t \in G$ podemos pensar $C_t := A_t \odot B_t$ como un ideal de C. En los casos que nos interesa B será una C*-álgebra nuclear, así que suponemos que C tiene una única C*-norma. Como ideales de C*-álgebras nucleares son nucleares, también podemos suponer que cada C_t tiene una única C*-norma, que es la restricción de la C*-norma de C. Sea $D := A \otimes B$ la C*-completación de C con respecto a su C*-norma y sea D_t la clausura de C_t en D. Los comentarios anteriores implican que para cada $t \in G$ existe un único $*-$homomorfismo $\theta_t \colon D_{t^{-1}} \to D_t$ tal que $\theta_t(a \otimes b) = \alpha_t(a) \otimes \beta_t(b)$.

Lema 4.75. *El par $\theta := (\{\theta_t\}_{t \in G}, \{D_t\}_{t \in G})$ es una C*-acción parcial.*

Demostración. Utilizaremos el Teorema 1.33. Probemos primero que θ es una acción parcial en conjuntos. Dados $s, t \in G$ se tiene que $(A_s A_t) \otimes (B_s B_t) = D_s D_t$ pues $A_s A_t \odot B_s B_t = C_s C_t$ es denso en $D_s D_t$. Luego

$$\theta_t(D_{t^{-1}} D_s) = \overline{\theta_t(A_{t^{-1}} A_s \odot B_{t^{-1}} B_s)} = \overline{A_t A_{ts} \odot B_t B_{ts}} = D_t D_{ts}.$$

Por otro lado es fácil verificar que $\theta_s(\theta_t(x)) = \theta_{st}(x)$ para todo $x \in A_{t^{-1}} A_{t^{-1}s} \odot B_{t^{-1}} B_{t^{-1}s}$ y dado que cada θ_r es continua y $A_{t^{-1}} A_{t^{-1}s} \odot B_{t^{-1}} B_{t^{-1}s}$ es denso en $D_{t^{-1}} D_{t^{-1}s}$, la igualdad es válida para todo $x \in D_{t^{-1}} D_{t^{-1}s}$. Con esto terminamos de mostrar que si G es considerado con la topología discreta entonces θ es una acción parcial en C*-álgebras.

Sean S_A y S_B las familias de secciones continuas de $\{A_t\}_{t \in G}$ y $\{B_t\}_{t \in G}$. Dadas $f \in S_A$ y $g \in S_B$ definimos $f \odot g \colon G \to D$ como $(f \odot g)(s) = f(s) \otimes g(s)$. La continuidad del mapa $A \times B \to D,\ (a, b) \to a \otimes b$, implica que $S := \{f \odot g \colon f \in S_A,\ g \in S_B\}$ es una familia de secciones continuas de $\{D_t\}_{t \in G}$. Puesto que $S_A(t) = A_t$ y $S_B(t) = B_t$ tenemos que $\operatorname{span} S(t) = C_t$ es denso en D_t. Por otra parte para cada $f \in S_A$ y $g \in S_B$ la función $G \to D,\ t \mapsto \theta_t(f \odot g(t)) = \alpha_t(f(t)) \otimes \beta_t(g(t))$, es continua. □

El *producto tensorial* $\alpha \otimes \beta$ es la acción parcial θ del Lema anterior.

Para construir los bloques fundamentales no conmutativos tomemos un conjunto finito $X \subset G$ con n elementos (G discreto). Llamemos β a la acción parcial en $\mathbb{C}^n = C(X)$ definida por la restricción a X de la traslación a izquierda de G. Recordemos que $\mathbb{C}^n$ es nuclear. Sea A una C*-álgebra unital cualquiera y α la acción global trivial de G en A.

Definición 4.76. Un bloque fundamental no conmutativo es una acción parcial de la forma $\alpha \otimes \beta$, siendo α y β como arriba. Un ejemplo básico no conmutativo es una suma directa externa de una cantidad finita de bloques fundamentales no conmutativos.

La versión no conmutativa del Teorema 4.71 sería la siguiente:

Teorema 4.77. *Supongamos que G es un grupo discreto libre de torsión y que η es una C*-acción parcial cuadrado integrable de G en una C*-álgebra unital A. Luego η es isomorfa a un ejemplo básico no conmutativo.*

Demostración. El Teorema 4.62 nos dice que η tiene una globalización. Luego el Teorema 3.14 implica que cada A_t tiene unidad, que llamaremos 1_t.

La C*-álgebra generada por $\{1_t\}_{t\in G}$, B, es conmutativa y unital. Por lo tanto existe un espacio compacto y Hausdorff X tal que $B = C(X)$. Tenemos que B es $\eta-$invariante pues $B \cap A_t = B1_t = \overline{\operatorname{span}}\,\{1_t 1_{s_1} \cdots 1_{s_n} \colon s_1, \ldots, s_n \in G,\ n \in \mathbb{N}\}$ y $\eta_t(1_{t^{-1}} 1_{s_1} \cdots 1_{s_n}) = \eta_t(1_{t^{-1}} 1_{s_1}) \cdots \eta_t(1_{t^{-1}} 1_{s_n}) = 1_t 1_{ts_1} \cdots 1_t 1_{ts_n}$. De eso deducimos que $\eta_t(B \cap A_{t^{-1}}) = B \cap A_t$ y por lo tanto B es invariante.

La restricción de η a B, θ, es una C*-acción parcial porque es una acción parcial en conjuntos, cada $B_t = B1_t$ es un ideal de B y cada θ_t es un $*-$homomorfismo porque es la restricción de η_t. Sea σ la única acción parcial HLC de G en X tal que $\Theta(\sigma) = \theta$ (ver la Sección 1.3.1).

Probemos que σ es propia mostrando que θ es cuadrado integrable. Pensemos $C_c^\theta(G, B) \subset C_c^\eta(G, A)$ y a $L^2_\theta(G, B)$ como la clausura de $C_c^\theta(G, B)$ en $C_c^\eta(G, A)$. Dado un conjunto finito $F \subset G$ sea $\mathbb{I}_F$ la función indicador de F, y definamos $1_F \in C_c^\eta(G, B)$ como $1_F(t) = \mathbb{I}_F(t)1_t$. Si Λ es el conjunto de partes finitas de G ordenado con $F \leq F' \Leftrightarrow F \subset F'$, entonces $\{1_F\}_{F\in\Lambda}$ es una unidad aproximada de $C_0^\eta(G, A)$ contenida en $C_c^\theta(G, B)$, por lo que también es una unidad aproximada de $C_0^\theta(G, B)$. Dado $b \in B$ sabemos que $b \in A_{\mathrm{si}}$ porque $A = A_{\mathrm{si}}$ (Observación 4.64). Por otro lado para cada $F \in \Lambda$ y $c \in B$ se tiene que $\langle\langle b|^\theta_{1_F}(c) = \langle\langle b|^\eta_{1_F}(c)$. Luego la red $\{\langle\langle b|^\theta_{1_F}(c)\}_{F\in\Lambda}$ es convergente en $L^2_\theta(G, B)$ porque $\{\langle\langle b|^\eta_{1_F}(c)\}_{F\in\Lambda}$ es convergente en $L^2_\eta(G, A)$.

Habiendo mostrado que σ es propia usamos el Teorema 4.71 para concluir que σ es isomorfa a un ejemplo básico. Sea $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$ una partición en abiertos compactos disjuntos de manera que $\sigma|_{X_i}$ es isomorfa a un bloque fundamental (conmutativo).

Llamemos p_i a la proyección correspondiente a X_i, es decir $p_i = \mathbb{I}_{X_i}$. Por construcción $p_i \in B \subset \mathcal{Z}(A)$ (el centro de A). Luego $A_i := Ap_i$ es un ideal de A, que afirmamos es $\eta-$invariante. En efecto, puesto que X_i es σ invariante se cumple que $\theta_t(1_{t^{-1}}p_i) = 1_t p_i$ y por lo tanto $\eta_t(1_{t^{-1}}p_i) = 1_t p_i$. Luego $\eta_t(A_i \cap A_{t^{-1}}) = \eta_t(A1_{t^{-1}}1_{t^{-1}}p_i) = A1_t 1_t p_i = A_i \cap A_t$. Esto nos permite afirmar que $\eta = \eta|_{A_1} \boxplus \cdots \boxplus \eta|_{A_n}$.

Habremos terminado la prueba si mostramos que $\eta|_{A_i}$ es isomorfa a un bloque fundamental no conmutativo. Asumamos que $X = X_1$, es decir que σ es isomorfa a un bloque fundamental (conmutativo). Luego existen un espacio compacto y Hausdorff Y y un conjunto finito $Z \subset G$ de manera que $X = Y \times Z$ y σ es el producto de la acción global trivial en Y y la restricción a Z de la traslación a izquierda, que llamaremos τ.

Supongamos que $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ y sea $q = 1_{z_1} \in C(Z)$ la proyección correspondiente a z_1. Definamos $C := A(1_Y \otimes q)$, que es un ideal de A pues $1_Y \otimes q \in B \subset \mathcal{Z}(A)$. Llamemos α a la acción global trivial de G en C. Afirmamos que η es isomorfa a $\alpha \otimes \Theta(\tau)$, donde $\Theta(\tau)$ representa la acción parcial de G en $C(Z) = \mathbb{C}^m$ definida por τ.

Para construir un isomorfismo $\pi\colon A \to C \otimes C(Z)$ observemos, por un lado, que para cada $a \in A$ se tiene que $a = a(1_Y \otimes 1_{z_1}) + \cdots + a(1_Y \otimes 1_{z_m})$. Por otro lado la definición τ implica que $z_i \in Z_{z_i z_1^{-1}}$ y $\tau_{z_1 z_i^{-1}}(z_i) = z_1$; por lo tanto $1_Y \otimes 1_{z_i} \in B_{z_i z_1^{-1}} \subset A_{z_i z_1^{-1}}$ y $\eta_{z_1 z_i^{-1}}(1_Y \otimes 1_{z_i}) = 1_Y \otimes 1_{z_1}$. Definamos $\pi(a) := \sum_{j=1}^m \eta_{z_1 z_j^{-1}}(a[1_Y \otimes 1_{z_j}]) \otimes 1_{z_j}$. La inversa de π es $\rho\colon C \otimes C(Z) \to A$, $\rho(\sum_{j=1}^m b_j \otimes 1_{z_j}) = \sum_{j=1}^m \eta_{z_j z_1^{-1}}(b_j)$.

Para verificar que $\pi(A_t) = C \otimes C(Z)_t$ basta ver que $\pi(1_t)$ es la unidad de $C \otimes C(Z)_t$. Fijado $t \in G$ se tiene que $1_t = 1_t(1_Y \otimes 1_{z_1}) + \cdots + 1_t(1_Y \otimes 1_{z_m})$. Recordemos que $1_t \in C(Y \times Z)_t = C(Y \times Z_t)$ y que $Z_t = Z \cap tZ$. De esto deducimos que

$$1_t = 1_Y \otimes 1_{Z_t} = 1_Y \otimes \sum_{z \in Z \cap tZ} 1_z = \sum_{z \in Z \cap tZ} 1_Y \otimes 1_z.$$

Luego $\pi(1_t) = (1_Y \otimes 1_{z_1}) \otimes \sum_{z \in Z \cap tZ} 1_z = 1_C \otimes 1_{Z_t}$.

Finalmente, si $a \in A_{t^{-1}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\pi(\eta_t(a)) = \pi(\eta_t(a)1_t) &= \sum_{z \in Z \cap tZ} \pi(\eta_t(a)[1_Y \otimes 1_z]) = \sum_{z \in Z \cap tZ} \pi(\eta_t(a[1_Y \otimes 1_{t^{-1}z}])) \\
&= \sum_{z \in Z \cap tZ} \eta_{z_1 z^{-1} t}(a[1_Y \otimes 1_{t^{-1}z}]) \otimes 1_z = \sum_{z \in Z \cap tZ} \eta_{z_1 (t^{-1}z)^{-1}}(a[1_Y \otimes 1_{t^{-1}z}]) \otimes 1_z \\
&= \sum_{w \in Z \cap t^{-1}Z} \eta_{z_1 w^{-1}}(a[1_Y \otimes 1_w]) \otimes 1_{tw} \\
&= \sum_{w \in Z \cap t^{-1}Z} \alpha_t \otimes \tau_t \left(\eta_{z_1 w^{-1}}(a[1_Y \otimes 1_w]) \otimes 1_w\right) \\
&= \alpha_t \otimes \tau_t \left(\pi(a)\right).
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que π es un isomorfismo de C*-acciones parciales y por tanto η (es decir cada $\eta|_{A_i}$) es isomorfa a un bloque fundamental no conmutativo. $\square$

La descripción dada por el Teorema anterior es explícita y puede usarse para calcular los productos cruzados. Supongamos que α es una acción parcial cuadrado integrable del grupo discreto libre de torsión G en la C*-álgebra unital A. Luego A es isomorfa a un ejemplo básico no conmutativo, y el isomorfismo se da explícitamente en la demostración del Teorema anterior. Por lo tanto para calcular $A \rtimes_\alpha G$ descomponemos α en una suma directa de bloques fundamentales no conmutativos: $A = A_1 \boxplus \cdots \boxplus A_n$ y $\alpha = \alpha|_{A_1} \boxplus \cdots \boxplus \alpha|_{A_n}$. Entonces $A \rtimes_\alpha G = (A_1 \rtimes_{\alpha|_{A_1}} G) \boxplus \cdots \boxplus (A_n \rtimes_{\alpha|_{A_n}} G)$.

Hemos reducido el problema a calcular el producto cruzado de un ejemplo básico no conmutativo así que asumimos que $A = A_1 = B \otimes C(F)$ donde: B es una C*-álgebra unital, $F \subset G$ es un conjunto finito y α es el producto tensorial de la acción global trivial de G en B, β, con la acción que define la restricción a F de la traslación a izquierda de G, $\Theta(\sigma)$; es decir $\alpha = \beta \otimes \Theta(\sigma)$.

Llamemos τ a la traslación a izquierda de G, con lo cual $\tau|_F = \sigma$ y τ es una envolvente de σ. Si pensamos a $\mathbb{C}^{\#F} = C(F)$ (aquí $\#F$ es el cardinal de F) como ideal de $c_0(G)$ entonces $B \otimes C(F)$ es un ideal de $B \otimes c_0(G)$ y $\beta \otimes \Theta(\tau)$ es una globalización envolvente de $\alpha \otimes \Theta(\sigma)$. Esto nos permite calcular $(B \otimes C(F)) \rtimes_\alpha G$ como una C*-subálgebra de

$$(B \otimes c_0(G)) \rtimes_{\beta \otimes \Theta(\tau)} G = B \otimes \mathbb{K}(L^2(G)).$$

El producto $C(F) \rtimes_{\Theta(\sigma)} G$ es, visto dentro de $\mathbb{K}(L^2(G))$, $\mathbb{K}(L^2(F)) = \mathbb{M}_{\#F}(\mathbb{C})$. Luego $(B \otimes C(F)) \rtimes_\alpha G = B \otimes \mathbb{M}_{\#F}(\mathbb{C})$.

Corolario 4.78. *Si G es un grupo discreto libre de torsión, A es una AF álgebra*[12] *unital y α una acción parcial cuadrado integrable de G en A entonces $A \rtimes_\alpha G$ es AF.*

Demostración. Por el Teorema anterior α es un ejemplo básico no conmutativo, así que existen ideales $A_1, \ldots, A_n \subset A$ tales que $\alpha = \alpha|_{A_1} \boxplus \cdots \boxplus \alpha|_{A_n}$. Cada A_i es AF por ser un ideal de una AF álgebra. Como toda suma directa externa de AF álgebras es AF basta mostrar que el producto cruzado de $\alpha|_{A_i}$ es AF, así que asumimos directamente que $A = A_1$, o sea que α es un bloque fundamental.

Si $A = B \otimes \mathbb{C}^n$ antes mostramos que $A \rtimes_\alpha G = B \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, y nos bastará con mostrar que B es AF. Observando la demostración del Teorema anterior notamos que B tiene unidad,

[12] Álgebra aproximadamente finita. Son aquellas que son límite inductivo de una sucesión de C*-álgebras de dimensión finita.

que llamamos 1_B. Con $p \in \mathbb{C}^n$ una proyección no nula minimal tenemos $1_B \otimes p \in \mathcal{Z}(A)$ y B es isomorfa a $A(1_B \otimes p)$, que es un ideal de A y por lo tanto es AF. $\square$

El mismo razonamiento puede emplearse para calcular los productos cruzados reducidos y de hecho probar que α es promediable, lo cual es una consecuencia de resultados más generales del próximo capítulo.

Como adelanto de los Teoremas de Imprimitividad que vendrán tenemos que $(B \otimes C(F)) \rtimes_\alpha G$ es Morita equivalente a B. El álgebra B cumple el papel de álgebra de puntos fijos de $B \otimes C(F)$ ya que la acción en B es la trivial y en F es la traslación.

Ahora recuperamos algunas ideas de la demostración anterior que pueden ser útiles en general.

Teorema 4.79. *Supongamos que G es un grupo HLC, α es una acción parcial en C*-álgebras de G en A. Luego valen las siguientes afirmaciones:*

(I) El centro de A, $\mathcal{Z}$, es $\alpha-$invariante. Si G es discreto entonces la restricción $\alpha|_{\mathcal{Z}}$ es una acción parcial en C-álgebras y si, adicionalmente, A tiene unidad y α es cuadrado integrable (tiene una globalización) entonces $\alpha|_{\mathcal{Z}}$ es cuadrado integrable (tiene una globalización).*

(II) Para cada proyección $p \in \mathcal{Z}$ Ap es un ideal de A.

(III) Si $\{p_j\}_{j\in J}$ es una unidad aproximada (creciente) de A contenida en $\mathcal{Z}$ entonces $\{Ap_j \rtimes_\alpha G\}_{j\in J}$ es una familia creciente de C-subálgebras de $A \rtimes_\alpha G$ y su unión es densa en $A \rtimes_\alpha G$. Si, adicionalmente, α es cuadrado integrable y G discreto entonces α es promediable.*

Demostración. (I) Tomemos $t \in G$ y $a \in \mathcal{Z} \cap A_{t^{-1}}$. Dado $b \in A$ tomemos una unidad aproximada de A_t, $\{e_i\}_i$, para deducir que

$$\alpha_t(a)b = \lim_i \alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(e_i b)) = \lim_i \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(e_i b)a) = \lim_i e_i b\alpha_t(a) = b\alpha_t(a).$$

Esto implica que $\mathcal{Z}$ es invariante.

En general, sin importar la topología de G, $\beta := \alpha|_{\mathcal{Z}}$ es una acción parcial continua y cada β_t es un $*-$homomorfismo. En caso que G sea discreto es evidente que $\{\mathcal{Z} \cap A_t\}_{t\in G}$ es una familia continua, por lo que β es una acción parcial en C*-álgebras.

Supongamos que A tiene unidad, que G es discreto y que α es cuadrado integrable. Luego α es globalizable (Teorema 4.62). El Teorema 3.14 implica que cada A_t tiene unidad, digamos 1_t. Dado que 1_t es la unidad de un ideal de A tenemos $1_t \in \mathcal{Z}$, por lo que $\mathcal{Z} \cap A_t$

tiene unidad y el Teorema antes citado implica que $\alpha|_{\mathcal{Z}}$ tiene una globalización. Imitando la demostración del Teorema 4.77 podemos mostrar que 1_e es cuadrado integrable con respecto a $\alpha|_{\mathcal{Z}}$, por lo que $\mathcal{Z}_{\mathrm{si}} \supset \mathcal{Z}1_e = \mathcal{Z}$ y $\alpha|_{\mathcal{Z}}$ es cuadrado integrable.

(II) Es directo.

(III) Si $p, q \in \mathcal{Z}$ son proyecciones tales que $p \leq q$ entonces $Ap \subset Aq$ porque $pq = p$. Luego la primera parte de la afirmación se deduce del Corolario 2.11.

Supongamos que α es cuadrado integrable y G discreto. Si p es una proyección central, la restricción $\alpha|_{Ap}$ es cuadrado integrable porque $A^{\alpha}_{\mathrm{si}}p$ es denso en Ap y está contenido en $Ap_{\mathrm{si}}^{\alpha|_{Ap}}$ (Teorema 4.42). Luego $\alpha|_{Ap}$ proviene de una acción parcial propia en el espectro de Ap (Sección 4.3.1). La inclusión canónica $\mathcal{Z}(Ap) \to Ap$ es un homomorfismo fuertemente no degenerado (porque $Ap \cap A_t$ tiene unidad) y equivariante con respecto a $\alpha|_{\mathcal{Z}(Ap)}$ y $\alpha|_{Ap}$. En el lenguaje de la Sección 5.5 $\alpha|_{Ap}$ es una acción parcial Kasparov-propia. El Teorema 5.43 establece que tales accionas parciales son promediables, con una prueba que el lector puede consultar desde este punto sin necesidad de leer el resto del Capítulo 5 (más que la definición de acción parcial Kasparov-propia).

Ahora pasamos a mostrar que α es promediable. Dada $f \in L^1(\mathcal{B}\alpha)$ y $\varepsilon > 0$ tomemos $j \in J$ y $g \in L^1(\mathcal{B}\alpha|_{Ap_j})$ tales que $\|f - g\|_u < \varepsilon/2$ (el subíndice indica la norma universal, r es para reducida). Luego $|\|f\|_u - \|f\|_r| \leq |\|f\|_u - \|g\|_u| + |\|f\|_r - \|g\|_r| < \varepsilon$. Como f y ε son arbitrarios deducimos que $\|f\|_u = \|f\|_r$. $\square$

Observe el lector que si en la situación (IV) agregamos la hipótesis de que G sea libre de torsión, todos los productos cruzados $Ap_j \rtimes_\alpha G$ son productos cruzados de ejemplos básicos.

Corolario 4.80. *Supongamos que A es una AF álgbra, G un grupo discreto y libre de torsión y α es una acción parcial cuadrado integrable de G en A. Si para todo $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ existe una proyección $p \in \mathcal{Z}(A)$ tal que $\|a - pa\| < \varepsilon$ entonces $A \rtimes_\alpha G$ es una AF álgebra.*

Demostración. La prueba del Teorema 3.1.1 de [Mur90] implica que si Λ es el conjunto de proyecciones de $\mathcal{Z}(A)$ entonces $\{p\}_{p\in\Lambda}$ es una unidad aproximada de A. Como A es separable, de esa unidad aproximada puede extraerse una unidad aproximada numerable $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El Teorema anterior implica que $A \rtimes_\alpha G$ es el límite inductivo de $\{Ap_n \rtimes_\alpha G\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por otra parte Ap_n es AF y unital (para todo $n \in \mathbb{N}$) por lo que el Corolario 4.78 nos dice que $Ap_n \rtimes_\alpha G$ es AF. La tesis se deduce del hecho de que todo límite inductivo de AF álgebras es AF. $\square$

Capítulo 5

Teoremas de Imprimitividad

El estudio de las diferentes generalizaciones (a las álgebras no conmutativas) de la definición de acción propia ha estado estrechamente relacionado con la obtención de Teoremas de Imprimitividad como los de Green y Raeburn (ver, por ejemplo, [Rie82, Rae88]).

Tratando de avanzar en ese sentido dentro de la teoría de las acciones parciales, en mi tesis de maestría [Fer11] demostré un Teorema de Imprimitividad para cierto tipo de acciones parciales propias. En este último capítulo demostraremos un Teorema de Imprimitividad para acciones parciales que, a la vez, generaliza el resultado principal de la tesis de maestría, simplifica la prueba del mismo y tiene en cuenta los últimos desarrollos de la teoría de acciones parciales propias.

5.1. Acciones parciales débilmente propias

En [BE13, BE14] Buss y Echterhoff demuestran Teoremas de Imprimitividad a partir de acciones débilmente propias ("weakly proper"). Dichas acciones son casos particulares de acciones cuadrado integrables pero más generales que las propias en el sentido de Kasparov. Por mencionar un aspecto en el que se diferencian diremos que existen acciones débilmente propias no promediables pero toda acción propia en el sentido de Kasparov es promediable.

Recordemos la definición de acciones débilmente propias. Supongamos que γ es una acción global en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$ y que σ es una acción parcial HLC de G en X. También llamaremos σ a la C*-acción que define σ en $C_0(X)$.

Definición 5.1. Diremos que γ es una $\sigma-$acción si existe un *-homomorfismo no degenerado y equivariante $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$. Se dice que γ es débilmente propia si es una $\sigma-$acción para alguna acción HLC y propia σ.

Los resultados de la Sección 4.3.1 y el Corolario 4.48 implican que toda acción débilmente propia es cuadrado integrable. Esta propiedad debería mantenerse al intentar dar una definición de acción parcial débilmente propia, lo cual es nuestro próximo objetivo.

En el capítulo anterior estudiamos las posibles definiciones de acciones parciales HLC propias y llegamos a reconocer a una de las posibles definiciones como la más adecuada (Definición 4.10). La pregunta que debemos responder es ¿qué propiedades requerimos al homomorfismo ϕ de la definición de arriba cuando las acciones son parciales? Para responder a la pregunta analicemos algunos ejemplos sencillos teniendo en cuenta los comentarios del párrafo anterior.

Evidentemente el Corolario 4.48 nos dice que una posible opción (si queremos que todas las acciones parciales débilmente propias sean cuadrado integrables) es considerar homomorfismos fuertemente no degenerados y equivariantes. Otra opción sería considerar homomorfismos de construcción de productos tensoriales. Veamos con un ejemplo que en caso de optar por estos últimos no todas las acciones parciales débilmente propias serían cuadrado integrables.

Ejemplo 5.1. Sean $X = Y = [0, 1]$, σ la acción global trivial de $\mathbb{Z}_2$ en X y τ la acción parcial de $\mathbb{Z}_2$ en Y de manera que $\tau_1 = \mathrm{id}_{[0,1/2)}$. Evidentemente $\phi := \mathrm{id}\colon C(X) \to C(Y)$ es no degenerado y es fácil mostrar que es de construcción de productos tensoriales. Por otra parte σ es propia pero τ no, puesto que el gráfico de τ no es cerrado. Luego la acción de $\mathbb{Z}_2$ en $C(Y)$ no es cuadrado integrable.

Esperamos que con la discusión anterior el lector esté convencido de aceptar la siguiente definición.

Definición 5.2. Supongamos que G es un grupo HLC, σ una acción parcial HLC de G en X y γ una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$. Diremos que γ es una $\sigma-$acción parcial (con respecto a ϕ) si existe un $*-$homomorfismo fuertemente no degenerado y equivariante $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$. Asimismo, diremos que γ es débilmente propia si es una $\sigma-$acción parcial para alguna acción parcial HLC y propia σ.

De la discusión de arriba deducimos que toda acción parcial débilmente propia es cuadrado integrable.

Notación 5.3. Si queremos explicitar la acción σ (y el homomorfismo ϕ) diremos que γ es $\sigma-$débilmente propia (con estructura ϕ).

Ejemplo 5.2. Toda acción parcial cuadrado integrable de un grupo discreto en una C*-álgebra unital es débilmente propia. En efecto si γ es una acción parcial propia de G en la C*-álgebra unital A, razonando como en la demostración del Teorema 4.77 construimos una C*-álgebra conmutativa $B = C_0(X) \subset \mathcal{Z}(A)$ de manera que $\delta := \gamma|_B$ es una acción parcial cuadrado integrable, por lo que proviene de una acción parcial propia σ de G en X. La estructura de $\sigma-$acción parcial de γ está dada por la inclusión canónica $\iota \colon B \to A$.

Es momento de utilizar algunos resultados del Capítulo II.

Proposición 5.4. *γ es una $\sigma-$acción con respecto a $\phi \colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}) = M(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ si y solamente γ^l es una $\sigma-$acción con respecto a ϕ.*

Demostración. El directo es, exactamente, la prueba del Corolario 3.11. En cuanto al recíproco notemos que para todo $t \in G$ se cumple que

$$\phi(C_0(X)_t)\mathcal{X} = \phi(C_0(X)_t)\mathbb{K}(\mathcal{X})\mathcal{X} = \mathbb{K}(\mathcal{X})_t\mathcal{X} = \mathbb{K}(\mathcal{X}_t)\mathcal{X} = \mathcal{X}_t,$$

lo que nos dice que ϕ es fuertemente no degenerado con respecto a γ.

Para ver que ϕ es equivariante con respecto a σ y γ tomemos $a \in C_0(X)_{t^{-1}}$ y $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$. Como $\mathbb{K}(\mathcal{X}_{t^{-1}})\mathcal{X}_{t^{-1}} = \mathcal{X}_{t^{-1}}$ podemos encontrar $T \in \mathbb{K}(\mathcal{X}_t)$ e $y \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ de manera que $x = Ty$. Luego

$$\phi(\sigma_t(a))\gamma_t(x) = \phi(\sigma_t(a))\gamma^l_t(T)\gamma_t(y) = \gamma^l_t(\phi(a)T)\gamma_t(y) = \gamma_t(\phi(a)Ty) = \gamma_t(\phi(a)x).$$

□

Teorema 5.5. *Supongamos que γ es una $\sigma-$acción parcial con respecto a $\phi \colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ y que σ tiene una globalización. Luego γ^l es globalizable. Si τ y β son las envolventes de σ y γ^l respectivamente y pensamos a σ y γ^l como restricciones de τ y β; entonces existe un único $*-$homomorfismo ϕ^e de manera que β es una $\tau-$acción global con respecto a ϕ^e y $\phi^e(a)T = \phi(a)T$, para todo $a \in C_0(X)$ y $T \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$.*

Demostración. El Corolario 3.11 implica que γ^l es globalizable. La Proposición anterior nos dice que γ^l es una $\sigma-$acción parcial con respecto a ϕ. El resto se deduce del Teorema 3.12. □

Corolario 5.6. *Si γ es una $\sigma-$acción parcial débilmente propia con estructura ϕ entonces σ y γ^l son globalizables y la envolvente de σ es propia. Además, tomando τ, β y ϕ^e como en el enunciado del Teorema anterior, se cumple que β es una $\tau-$acción global débilmente propia con estructura ϕ^e.*

Demostración. El Lema 4.8 nos dice que σ es globalizable y que su envolvente es propia. El resto se deduce del Teorema anterior. □

Para obtener Teoremas de Imprimitividad es necesario tener bimódulos de equivalencia, que construiremos a continuación. Los resultados de esta sección pueden demostrarse directamente, a expensas de cálculos largos y una notación difícil de manejar. Por esto preferimos dar argumentos que refieren a Teoremas demostrados en otros trabajos.

Fijemos una acción parcial en módulos de Hilbert γ de G en $\mathcal{X}_A$. A γ^r la llamaremos α. Asumiremos que γ es una $\sigma-$acción parcial con estructura $\phi\colon C_0(X)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$, siendo σ una acción parcial HLC y propia G en X. Utilizaremos, también, la letra σ para nombrar a la acción que define σ en X.

Sea σ^e la globalización envolvente de σ (existe porque σ es propia en X). Asumiremos, como es lícito, que X es un abierto de X^e, que $\sigma^e|_X=\sigma$ y que $\sigma^e X=X^e$. Sabemos que σ^e es propia.

Lema 5.7. *Existe un único *-homomorfismo no degenerado $\phi^e\colon C_0(X^e)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$ que extiende a ϕ y es $\sigma^e-\gamma-$equivariante.*

Demostración. Evidentemente ϕ es no degenerado[1]. Sea $\phi^e\colon C_0(X^e)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$ la única extensión de ϕ. Obviamente la extensión es no degenerada.

Para mostrar que ϕ^e es equivariante fijemos $t\in G$, $a\in C_c(X^e)$ y $\xi\in\mathcal{X}_t$. Luego existen $b\in C_0(X)_{t^{-1}}$ y $\eta\in\mathcal{X}_{t^{-1}}$ tales que $\xi=\phi(b)\eta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\phi^e(\sigma^e_t(a))\gamma_t(\xi)&=\phi^e(\sigma^e_t(a))\gamma_t(\phi(b)\eta)=\phi(\sigma^e_t(a)\sigma_t(b))\gamma_t(\eta)=\phi(\sigma_t(ab))\gamma_t(\eta)\\&=\gamma_t(\phi(ab)\eta)=\gamma_t(\phi^e(a)\xi).\end{aligned}$$

□

5.2. Un prebimódulo de equivalencia

Para establecer equivalencias de Morita entre productos cruzados necesitamos un bimódulo. En general un producto cruzado se obtiene como la completación de una $*$-álgebra con respecto a ciertas C*-normas distinguidas. Al estudiar productos cruzados reducidos y plenos nos interesa poder cambiar la norma que utilizamos para completar el álgebra, por este motivo utilizaremos pre-bimódulos de equivalencia en lugar de bimódulos de Hilbert. Las definiciones necesarias así como el resultado principal referente a la completación con diferentes normas se encuentra en el Apéndice B.

En todos los Teoremas de Imprimitividad de acciones globales que conmutan se necesita definir un *álgebra de puntos fijos*. La definición de álgebra de puntos fijos de una acción

[1] Fuertemente no degenerado implica no degenerado

parcial débilmente propia que exponemos ha sido construida persiguiendo dos objetivos: (a) que coincida con la definición de Buss y Echterhoff cuando las acciones en cuestión son globales y (b) que permita enunciar y mostrar los Teoremas de Imprimitividad. Otro objetivo que hemos perseguido es que los enunciados no tengan hipótesis adicionales a las requeridas para las acciones globales.

Para construir un álgebra de puntos fijos tomemos una $\sigma-$acción parcial de G, γ, con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}_A)$. Tomemos una globalización envolvente de σ, $\Xi := (\tau, \iota, C_0(Z), C_0(Y))$. El $*-$homomorfismo $\phi \circ \iota^{-1}\colon C_0(Y) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ es fuertemente no degenerado, por lo que existe una única extensión ϕ^{Ξ} a $C_0(Z)$, la cual es equivariante (ver el Teorema 3.12 y su demostración). Provisionalmente definimos el $\Xi-$*submódulo de* $\mathcal{X}$ como $\mathcal{X}^{\Xi} := \phi^{\Xi}(C_c(Z))\mathcal{X}$.

Proposición 5.8. *Si* Ξ *y* Ω *son globalizaciones envolventes de* σ *entonces* $\mathcal{X}^{\Xi} = \mathcal{X}^{\Omega}$.

Demostración. Tomemos Ξ como arriba y $\Omega = (\nu, \kappa, C_0(V), C_0(U))$. Por la propiedad universal de las acciones envolventes existe un único isomorfismo de acciones parciales en C*-álgebras $\rho\colon \tau \to \nu$ que extiende a $\kappa \circ \iota^{-1}\colon \tau|_{C_0(Y)} \to \nu|_{C_0(U)}$. La unicidad implica que $\phi^{\Xi} = \phi^{\Omega} \circ \rho$. Entonces $\mathcal{X}^{\Xi} = \phi^{\Xi}(C_c(Z))\mathcal{X} = \phi^{\Omega}(\rho(C_c(Z)))\mathcal{X} = \phi^{\Omega}(C_c(V))\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\Omega}$. □

De hecho el $\Xi-$submódulo depende sólo de la clase de isomorfismo de σ. En efecto, si $\kappa\colon \sigma' \to \sigma$ es un isomorfismo de acciones parciales HLC entonces γ es una $\sigma'-$acción parcial débilmente propia con estructura $\phi \circ \kappa^{-1}$. Con Ξ como arriba tenemos que $\Xi' := (\sigma, \iota \circ \kappa, C_0(Z), C_0(Y))$ es una globalización envolvente de σ'. Además $[\phi \circ \kappa]^{\Xi'} = \phi^{\Xi}$, con lo cual $\mathcal{X}^{\Xi'} = \mathcal{X}^{\Xi}$.

Definición 5.9. Dada una $\sigma-$acción parcial, γ, de G en $\mathcal{X}$ con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$, definimos el $\sigma-$submódulo de $\mathcal{X}$, $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$, como el $\Xi-$submódulo de $\mathcal{X}$, donde Ξ es una globalización cualquiera de σ.

Notación 5.10. En caso que sea necesario hacer referencia a γ, σ o ϕ (como en la Sección 5.7) escribiremos $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, \gamma)$, $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, \gamma, \sigma)$ o $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, \gamma, \sigma, \phi)$ según sea necesario ser menos o más explícito en cuanto a las estructuras consideradas.

De acuerdo a los argumentos expuestos anteriormente, para estudiar el $\sigma-$submódulo siempre podemos asumir que σ tiene una globalización cuadrado integrable, esto es: pensando a σ como una acción parcial HLC propia podemos asumir que existe una acción global propia σ^e en un espacio X^e de forma que X es abierto en X^e, $\sigma^e|_X = \sigma$ y X^e es la σ^e-órbita de X. La extensión de la estructura ϕ a $C_0(X^e)$ será denotada ϕ^e. El lector podrá apreciar que las operaciones que definimos a lo largo de este capítulo en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ dependen únicamente de γ y de la clase de isomorfismo de σ.

En lo que sigue equiparemos a $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ con la operación ternaria

$$(u,v,w) = |u\rangle\rangle \circ \langle\langle u|w,$$

con lo cual obtenemos un $*-$anillo ternario (ver el Apéndice B). Haremos esto a la vez que mostramos que esta operación proviene de una estructura de $C-D-$prebimódulo de equivalencia.

Buscamos establecer equivalencias de Morita entre productos cruzados, lo que nos lleva a buscar D dentro de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$. El álgebra C será una $*-$subálgebra de $\mathbb{B}(\gamma)$, de ahí el nombre de puntos fijos. Específicamente C será el espacio generado en $\mathbb{B}(\gamma)$ por los operadores de la forma $|u\rangle\rangle\langle\langle v|$ y la acción de C en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ será la acción de $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{X}$.

Vale la pena observar que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) = \phi^e(C_c(X^e))\phi(C_0(X))\mathcal{X} = \phi(C_c(X^e)C_0(X))\mathcal{X}$ y que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ puede coincidir, o no, con $\phi(C_c(X))\mathcal{X}$ pues no podemos asegurar que la inclusión $C_c(X) \subset C_c(X^e)C_0(X)$ sea una igualdad[2].

Observación 5.11. $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$. En efecto, el Teorema 4.35 nos dice que $C_c(X^e) \subset C_c(X^e)_{\mathrm{si}}$ y el Teorema 4.43, junto con el Corolario 4.27, implica que $C_c(X^e)C_0(X) \subset C_0(X) \cap C_0(X^e)_{\mathrm{si}} = C_0(X)_{\mathrm{si}}$. Finalmente el Corolario 4.48 implica que

$$\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) = \phi(C_c(X^e)C_0(X))\mathcal{X} \subset \phi(C_0(X)_{\mathrm{si}})\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_{\mathrm{si}}.$$

Lema 5.12. *Dados $\xi,\eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ existe una única función $[\xi,\eta] \in C_c^{\alpha}(G,A)$ tal que, para todo $t \in G$ y $a \in A_t$, $a[\xi,\eta](t) = \langle \gamma_t(\xi\alpha_{t^{-1}}(a^*)), \eta\rangle$.*

Si la acción en $\mathcal{X}$ es global entonces $[\xi,\eta](t) = \langle \gamma_t(\xi), \eta\rangle$.

Demostración. Fijado $t \in G$, como $[\xi,\eta](t) \in A_t$, la ecuación de la tesis determina el producto de $[\xi,\eta](t)$ con todos los elementos de A_t. De existir $[\xi,\eta]$ los valores $[\xi,\eta](t)$ quedan determinados por la condición de la tesis, pues A_t tiene unidades aproximadas. Esto demuestra la unicidad.

Para mostrar la existencia supongamos que $\xi = \phi(f)\xi'$ y $\eta = \phi(g)\eta'$ con $f,g \in C_c(X^e) \cap C_0(X)$. Para cada $t \in G$ se tiene $\sigma^e_{t^{-1}}(g^*)f \in C_0(X)_{t^{-1}}$ y por lo tanto $\phi(\sigma^e_{t^{-1}}(g^*)f)\xi' \in \mathcal{X}_t$. Definamos $[\xi,\eta](t) := \langle \gamma_t(\phi(\sigma^e_{t^{-1}}(g^*)f)\xi'), \eta'\rangle$.

Dado que σ^e es propia y $f,g \in C_c(X^e)$, la función $t \mapsto \sigma^e_{t^{-1}}(g^*)f$ es continua y tiene soporte compacto. Luego la continuidad de γ implica que $[\xi,\eta]$ es continua y tiene soporte compacto. Notemos, además, que $[\xi,\eta](t) \in \langle \mathcal{X}_t, \mathcal{X}\rangle \subset A_t$.

[2] Por ejemplo con $X^e = G = \mathbb{R}$, $\sigma^e_t(x) = t + x$, $X = (0,1)$ y $\sigma = \sigma^e|_X$ la inclusión es estricta.

Dado $a \in A_t$ tenemos que

$$\begin{aligned} a[\xi,\eta](t) &= a\langle \gamma_t(\phi(\sigma^e_{t^{-1}}(g^*)f)\xi'), \eta'\rangle = \langle \gamma_t(\phi(\sigma^e_{t^{-1}}(g^*)f)\xi'\alpha_{t^{-1}}(a^*)), \eta'\rangle \\ &= \langle \phi^e(g^*)\gamma_t(\phi(f)\xi'\alpha_{t^{-1}}(a^*)), \eta'\rangle = \langle \gamma_t(\phi(f)\xi'\alpha_{t^{-1}}(a^*)), \phi^e(g^*)\eta'\rangle \\ &= \langle \gamma_t(\xi\alpha_{t^{-1}}(a^*)), \eta\rangle. \end{aligned}$$

Esto concluye la primera parte de la prueba, la segunda es inmediata. □

Proposición 5.13. *Dadas* $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ *se tiene que* $\langle\langle \xi | \eta = [\xi, \eta]$.

Demostración. Sea $\{e_j\}_j \subset C^\alpha_c(G, A)$ una unidad aproximada de $C^\alpha_0(G, A)$. Recordemos que $\pi\colon C^\alpha_0(G, A) \to C^\alpha_0(G, A)$, $\pi(u)(t) = \alpha_t(u(t^{-1}))$, es un automorfismo. Por definición $e_j(t)[\xi, \eta](t) = \langle \gamma_t(\xi\alpha_{t^{-1}}(e_j(t))), \eta\rangle = \langle\langle \xi|_{\pi(e_j)}\eta(t)$; luego $e_j[\xi, \eta] = \langle\langle \xi|_{\pi(e_j)}\eta$.

Sabemos que $\{\langle\langle \xi|_{\pi(e_j)}\eta\}_j$ converge en $L^2_\alpha(G, A)$ a $\langle\langle \xi|\eta$. Como $\operatorname{sop}(e_j[\xi, \eta]) \subset \operatorname{sop}([\xi, \eta])$ y $\{e_j[\xi, \eta]\}_j$ converge uniformemente a $[\xi, \eta]$; la red converge en la topología del límite inductivo y en $L^2_\alpha(G, A)$. Luego $[\xi, \eta] = \langle\langle \xi|\eta$. □

Teorema 5.14. *Si dadas* $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ *definimos* $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha \in C_c(\mathcal{B}\alpha)$ *como*

$$\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha(t) := \Delta(t)^{-1/2}\alpha_t([\xi, \eta](t^{-1}))\delta_t$$

y $\Phi\colon \mathcal{B}\alpha \to \mathbb{B}(L^2_\alpha(G, A))$ *es la representación regular (descrita en la sección 4.2), entonces* $\langle\langle \xi| \circ |\eta\rangle\rangle = \widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha)$ *y* $\langle\langle \xi, \gamma_t(\eta a)\rangle\rangle_\alpha = \Delta(t)^{-1/2}\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha a\delta_{t^{-1}}$*, para toda* $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ *y* $a \in A_{t^{-1}}$.

Demostración. Recordemos que $M\colon C^\alpha_0(G, A) \to \mathbb{B}(L^2_\alpha(G, A))$ es la representación por operadores de multiplicación, que es no degenerada. Utilizaremos el automorfismo π descrito al inicio de la prueba anterior.

Basta con mostrar que $M_{\pi(f)} \circ \langle\langle \xi| \circ |\eta\rangle\rangle(g) = M_{\pi(f)} \circ \widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha)(g)$, para toda $f, g \in C^\alpha_c(G, A)$. Fijemos $f, g \in C^\alpha_c(G, A)$ y $t \in G$.

Por un lado

$$\begin{aligned} M_{\pi(f)} \circ \langle\langle \xi| \circ |\eta\rangle\rangle(g) &= \langle\langle \xi|_f(|\eta\rangle\rangle(g))(t) = \langle \gamma_t(\eta f(t^{-1})), |\eta\rangle\rangle(g)\rangle \\ &= \int_G \langle \gamma_t(\eta f(t^{-1})), \gamma_s(\eta\alpha_{s^{-1}}(g(s))\rangle\, ds; \end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned}
M_{\pi(f)} \circ \int \Phi(\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_\alpha)(g)(t) \\
&= \alpha_t(f(t^{-1})) \int_G \Phi_{\langle\langle \xi,\eta\rangle\rangle_\alpha(s)} g(t)\, ds \\
&= \alpha_t(f(t^{-1})) \int_G \Delta(s)^{1/2} \alpha_{ts}\left(\alpha_{s^{-1}}(\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle_\alpha(s))\alpha_{s^{-1}t^{-1}}(g(ts))\right) ds \\
&= \int_G \alpha_t(f(t^{-1}))\alpha_{ts}\left([\xi,\eta](s^{-1})\alpha_{s^{-1}t^{-1}}(g(ts))\right) ds \\
&= \int_G \alpha_t(f(t^{-1}))\alpha_s\left([\xi,\eta](s^{-1}t)\alpha_{s^{-1}}(g(s))\right) ds.
\end{aligned}$$

Luego, para demostrar la tesis basta con ver que

$$\langle \gamma_t(\eta f(t^{-1})), \gamma_s(\eta\alpha_{s^{-1}}(g(s)))\rangle = \alpha_t(f(t^{-1}))\alpha_s\left([\xi,\eta](s^{-1}t)\alpha_{s^{-1}}(g(s))\right). \tag{5.2.1}$$

Fijemos entonces $s, t \in G$. Observemos que ambos miembros de la ecuación de arriba pertenecen a $A_s \cap A_t$. Tomemos una unidad aproximada de $A_s \cap A_t$, $\{e_j\}$. Luego

$$\begin{aligned}
\alpha_t(f(t^{-1}))\alpha_s\left([\xi,\eta](s^{-1}t)\alpha_{s^{-1}}(g(s))\right) \\
&= \lim_j e_j \alpha_t(f(t^{-1}))\alpha_s\left([\xi,\eta](s^{-1}t)\alpha_{s^{-1}}(g(s))\right) \\
&= \lim_j \alpha_s\left(\alpha_{s^{-1}}(e_j\alpha_t(f(t^{-1})))[\xi,\eta](s^{-1}t)\alpha_{s^{-1}}(g(s))\right) \\
&= \lim_j \alpha_s\left(\langle \gamma_{s^{-1}t}(\xi\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(f(t^{-1}))e_j)), \eta\rangle \alpha_{s^{-1}}(g(s))\right) \\
&= \lim_j \alpha_s\left(\langle \gamma_{s^{-1}t}(\xi f(t^{-1})\alpha_{t^{-1}}(e_j)), \eta\alpha_{s^{-1}}(g(s))\rangle\right) \\
&= \lim_j \langle \gamma_t(\xi f(t^{-1})\alpha_{t^{-1}}(e_j)), \gamma_s(\eta\alpha_{s^{-1}}(g(s)))\rangle \\
&= \lim_j e_j \langle \gamma_t(\xi f(t^{-1})), \gamma_s(\eta\alpha_{s^{-1}}(g(s)))\rangle \\
&= \langle \gamma_t(\xi f(t^{-1})), \gamma_s(\eta\alpha_{s^{-1}}(g(s)))\rangle.
\end{aligned}$$

Con esto probamos la Ecuación 5.2.1 y la primera parte de la prueba está completa.

Para la segunda tomemos $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ y $a \in A_{t^{-1}}$. Recordemos que la expresión $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha a\delta_{t^{-1}}$ hace referencia a la acción de $a\delta_{t^{-1}}$ como un multiplicador de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$. Lo que acabamos de mostrar junto con el Teorema 4.25 implica que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \gamma_t(\eta a)\rangle\rangle_\alpha) = \langle\langle \xi| \circ |\gamma_t(\eta a)\rangle\rangle &= \Delta(t)^{-1/2}\langle\langle \xi| \circ |y\rangle\rangle \circ \Phi_{a\delta_{t^{-1}}} \\
&= \widetilde{\Phi}(\Delta(t)^{-1/2}\langle\langle \xi, y\rangle\rangle_\alpha) \circ \Phi_{a\delta_{t^{-1}}} \\
&= \widetilde{\Phi}(\Delta(t)^{-1/2}\langle\langle \xi, y\rangle\rangle_\alpha a\delta_{t^{-1}}).
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{\Phi}$ es inyectiva en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ tenemos $\langle\langle \xi, \gamma_t(\eta a)\rangle\rangle_\alpha = \Delta(t)^{-1/2}\langle\langle \xi, y\rangle\rangle_\alpha a\delta_{t^{-1}}$. □

Con el Teorema anterior podemos demostrar, sin cálculos engorrosos, que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ puede hacerse un $C_c(\mathcal{B}\alpha)-$módulo. La acción a derecha será la definida en el Corolario 4.26. Definimos, para $\xi \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ y $f\delta \in C_c(\mathcal{B}\alpha)$:

$$\xi * (f\delta) := \xi * f := \int_G \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\xi f(t^{-1}))\, dt;$$

donde $C_c^\alpha(G, A) \to C_c(\mathcal{B}\alpha)$, $f \mapsto f\delta$, está determinada por $f\delta(t) = f(t)\delta_t$ y es un isomorfismo cuya inversa escribimos como $g \mapsto g\delta^{-1}$.

Observación 5.15. $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) * C_c(\mathcal{B}\alpha) \subset \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$.

Para demostrar la inclusión tomemos $a \in C_c(X^e) \cap C_0(X)$, $\xi \in \mathcal{X}$ y $f \in C_c^\alpha(G, A)$. Como σ^e es propia existe un compacto $C \subset X^e$ de manera que $\cup\{\mathrm{sop}(\sigma_t^e(a)) \colon t \in \mathrm{sop}(f)^{-1}\} \subset C$. Tomemos $b \in C_c(X^e)$ constante igual a 1 en C, de manera que $b\sigma_t^e(a) = \sigma_t^e(a)$, para todo $t \in \mathrm{sop}(f)^{-1}$. Luego

$$\phi^e(b)(\phi(a)\xi * (f\delta)) = \int_G \Delta(t)^{-1/2}\phi^e(b\sigma_t^e(a))\gamma_t(\xi f(t^{-1}))\, dt = \phi(a)\xi * (f\delta),$$

lo que implica que $\phi(a)\xi * (f\delta) \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$.

Corolario 5.16. *Para todo* $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ *se cumple que*

$$|\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta| \circ |\zeta\rangle\rangle = ||\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta|(\zeta)\rangle\rangle = |\xi * \langle\langle \eta, \zeta\rangle\rangle_\alpha\rangle\rangle$$

y que $|\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta|(\zeta) = \xi * \langle\langle \eta, \zeta\rangle\rangle_\alpha$. *En particular* $|\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle \circ \langle\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{X})| \circ |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle \subset |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle$.

Demostración. Del Teorema 4.24 y del Lema 1.68 concluimos que $|\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta| \in \mathbb{B}(\gamma)$. Luego el Corolario 4.28 implica que $|\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta| \circ |\zeta\rangle\rangle = ||\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta|(\zeta)\rangle\rangle$.

El Teorema anterior junto con el Corolario 4.26 implican que

$$|\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta| \circ |\zeta\rangle\rangle = |\xi\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(\langle\langle \eta, \zeta\rangle\rangle_\alpha) = |\xi * \langle\langle \eta, \zeta\rangle\rangle_\alpha\rangle\rangle.$$

Luego $|\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle \circ \langle\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{X})| \circ |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle \subset |\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) * C_c(\mathcal{B}\alpha)\rangle\rangle \subset |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle$.

Finalmente, el Lema 4.58 implica que para $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ se tiene $\xi = \eta$ si y solamente si $|\xi\rangle\rangle = |\eta\rangle\rangle$. Luego $|\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta|(\zeta) = \xi * \langle\langle \eta, \zeta\rangle\rangle_\alpha$ pues

$$||\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta|(\zeta)\rangle\rangle = |\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta| \circ |\zeta\rangle\rangle = |\xi * \langle\langle \eta, \zeta\rangle\rangle_\alpha\rangle\rangle.$$

□

Corolario 5.17. *Con la acción a derecha* $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \times C_c(\mathcal{B}\alpha) \to \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$, $(\xi, f) \mapsto \xi * f$, $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ *es un* $C_c(\mathcal{B}\alpha)$*-módulo.*

Además $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha \colon \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \to C_c(\mathcal{B}\alpha)$ *es* $C_c(\mathcal{B}\alpha)-$*lineal en la segunda variable y cumple que* $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha{}^* = \langle\langle \eta, \xi\rangle\rangle_\alpha$ *para todo* $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$.

Demostración. Probemos que $\xi * (f * g) = (\xi * f) * g$, para lo cual basta mostrar que $|\xi * (f * g)\rangle\rangle = |(\xi * f) * g\rangle\rangle$ (ver la demostración del corolario anterior). El Corolario 4.26 implica que

$$|\xi * (f * g)\rangle\rangle = |\xi\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(f * g) = |\xi\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(f) \circ \widetilde{\Phi}(g) = |(\xi * f) * g\rangle\rangle.$$

La identidad $\langle\langle \xi| \circ |\eta\rangle\rangle = \widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha)$ y el hecho de que $\widetilde{\Phi}$ es lineal e inyectiva en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ implican que la operación $*$ es bilineal.

Con los argumentos del párrafo anterior deducimos que $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ es lineal en la segunda variable. La igualdad $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha * f = \langle\langle \xi, \eta * f\rangle\rangle_\alpha$ se deduce de

$$\widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha * f) = \langle\langle \xi| \circ |\eta\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(f) = \langle\langle \xi| \circ |\eta * f\rangle\rangle = \widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta * f\rangle\rangle).$$

Además $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha{}^* = \langle\langle \eta, \xi\rangle\rangle_\alpha$ pues

$$\widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha{}^*) = (\widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha))^* = (\langle\langle \xi| \circ |\eta\rangle\rangle)^* = \langle\langle \eta| \circ |\xi\rangle\rangle = \widetilde{\Phi}(\langle\langle \eta, \xi\rangle\rangle_\alpha).$$

□

Con respecto a la continuidad de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ el siguiente resultado nos será extremadamente útil y es más que suficiente para nuestros propósitos.

Lema 5.18. *Supongamos que* I *es un conjunto dirigido,* $a, b \in C_c(X^e) \cap C_0(X)$, *y tenemos redes* $\{u_i\}_{i\in I}, \{v_i\}_{i\in I} \subset C_0(X)$ *y* $\{\xi_i\}_{i\in I}, \{\eta_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{X}$ *de manera que* $u_i \to u$, $v_i \to v$, $\xi_i \to \xi$ *y* $\eta_i \to \eta$. *Luego* $\{\langle\langle \phi(u_i a)\xi_i, \phi(v_i b)\eta_i\rangle\rangle_\alpha\}_i$ *converge a* $\langle\langle \phi(ua)\xi, \phi(vb)\eta\rangle\rangle_\alpha$ *en la topología del límite inductivo.*

Por otro lado, si $\{u_i\}_{i\in I}, \{v_i\}_{i\in I} \subset C_0(X)$ *son unidades aproximadas y* $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ *entonces* $\{\langle\langle \phi(u_i)\xi, \phi(v_i)\eta\rangle\rangle_\alpha\}_i$ *converge a* $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha$ *en la topología del límite inductivo.*

Demostración. Observemos que

$$\langle\langle \phi(u_i a)\xi_i, \phi(v_i b)\eta_i\rangle\rangle_\alpha(t) = \Delta(t)^{-1/2}\langle \phi(u_i)\xi_i, \gamma_t(\phi([a, b](t^{-1})\phi(v_i\xi_i)))\rangle,$$

lo que implica que $\mathrm{sop}(\langle\langle\phi(u_ia)\xi_i,\phi(v_ib)\eta_i\rangle\rangle_\alpha)\subset\mathrm{sop}([a,b])^{-1}$. Si borramos las i-es de la fórmula de arriba concluimos que $\mathrm{sop}(\langle\langle\phi(ua)\xi,\phi(vb)\eta\rangle\rangle_\alpha)\subset\mathrm{sop}([a,b])^{-1}$ y por lo tanto basta con mostrar la convergencia uniforme de las redes de la tesis.

Llamemos M al supremo de $t\mapsto\Delta(t)^{-1/2}$ en $\mathrm{sop}([a,b])^{-1}$. Usando la fórmula de arriba deducimos que para todo $t\in G$

$$\begin{aligned}\|\langle\langle\phi(ua)\xi,&\phi(vb)\eta\rangle\rangle_\alpha(t)-\langle\langle\phi(u_ia)\xi_i,\phi(v_ib)\eta_i\rangle\rangle_\alpha(t)\|\\ &\le M\|\langle\phi(u)\xi-\phi(u_i)\xi_i,\gamma_t(\phi([a,b](t^{-1})\phi(v)\eta))\rangle\|+\\ &\quad+\|\langle\phi(u_i)\xi_i,\gamma_t(\phi([a,b](t^{-1}))(\phi(v)\eta-\phi(v_i)\eta_i))\rangle\|\\ &\le M\|[a,b]\|_\infty(\|\phi(u)\xi-\phi(u_i)\xi_i\|\|\phi(v)\eta\|+\|\phi(u_i)\xi_i\|\|\phi(v)\eta-\phi(v_i)\eta_i\|).\end{aligned}$$

Como $\phi(u_i)\xi_i\to\phi(u)\xi$ y $\phi(v_i)\eta_i\to\phi(v)\eta$ las desigualdades implican la convergencia uniforme que queríamos.

Veamos ahora la parte final del enunciado. Como $\xi,\eta\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ existen $\xi',\eta'\in\mathcal{X}$ y $a,b,c,d\in C_c(X^e)C_0(X)$ tales que $\xi=\phi(ab)\xi'$ y $\eta=\phi(cd)\eta'$. Tomemos las redes constantes $\xi_i'=\xi_i$ y $\eta_i'=\eta'$ y las redes $\{u_ia\}_i$ y $\{v_ib\}_i$, que convergen a ξ',η',a y b, respectivamente. Luego la primera parte del Lema implica que $\{\langle\langle\phi(u_i)\xi,\phi(v_i)\eta\rangle\rangle_\alpha\}_i=\{\langle\langle\phi(u_ia)\phi(b)\xi_i',\phi(v_ic)\phi(d)\eta_i'\rangle\rangle_\alpha\}_i$ converge en el límite inductivo a $\langle\langle\phi(ab)\xi',\phi(cd)\eta'\rangle\rangle_\alpha$, que es igual a $\langle\langle\xi,\eta\rangle\rangle_\alpha$. □

Lo único que necesitamos para hacer de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ un (pre)módulo de Hilbert es saber que el producto $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ es definido positivo; la positividad depende de la norma considerada.

Corolario 5.19. *Considerando a $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ como subálgebra de $A\rtimes_{\alpha,r}G$ la función $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ es un producto interno en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$.*

Demostración. Recordemos que la forma integrada $\widetilde{\Phi}$ define la C*-norma reducida de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$. Luego $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha\ge 0$ en $A\rtimes_{\alpha,r}G$ pues $\widetilde{\Phi}(\langle\langle\xi,\xi\rangle\rangle_\alpha)=\langle\langle\xi|\circ|\xi\rangle\rangle=\langle\langle\xi|\circ\langle\langle\xi|^*\ge 0$.

Además $\langle\langle\xi,\xi\rangle\rangle_\alpha(e)=[\xi,\xi](e)=\langle\xi,\xi\rangle$; por lo tanto $\langle\langle\xi,\xi\rangle\rangle_\alpha=0$ implica $\xi=0$. □

Con un poco más de trabajo podemos mostrar que $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ es definido positivo con respecto a la C*-norma universal (lo cual implica el corolario anterior). La idea, como en todo lo hecho hasta ahora, es imitar los argumentos para acciones globales de [BE13] pero eso será postergado a una sección posterior (Teorema 5.31).

Teorema 5.20. *Sea γ una $\sigma-$acción parcial débilmente propia de G con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}_A)$. Definamos $\alpha := \gamma^r$,*

$$\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X}) := \operatorname{span} |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle \circ \langle\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{X})| \subset \mathbb{B}(\gamma),$$
$$\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X}) := \operatorname{span}\langle\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{X}), \mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle_\alpha \subset C_c(\mathcal{B}\alpha)$$

y las operaciones

$$\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\ (T,\xi) \mapsto T(\xi),$$
$$\mathcal{X} \times \mathcal{F}_c^r(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\ (\xi, f) \mapsto \xi * f$$
$$\langle\ ,\ \rangle^l\colon \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}_c^l(\mathcal{X}),\ \langle \xi, \eta\rangle^l := |\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle \eta|,$$
$$\langle\ ,\ \rangle^r\colon \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}_c^r(\mathcal{X}),\ \langle \xi, \eta\rangle^r := \langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_\alpha.$$

Luego $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ y $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ son $*$-subálgebras y $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ es un $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X}) - \mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})-$prebimódulo de equivalencia. Además: (a) la C-norma reducida de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$, $\|\ \|_r$, es positiva con respecto a $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ (b) la C*-norma que define $\|\ \|_r$ en $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ es la norma de operadores (Teorema B.4) y (c) $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ es un $*$-ideal de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$.*

Demostración. La primera parte de la prueba consiste en verificar las condiciones de la Definición B.1. El Teorema 4.24 junto con el Lema 1.68 implican que $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ está contenido en $\mathbb{B}(\gamma)$. El Corolario 5.16 implica que $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ es una $*-$subálgebra de $\mathbb{B}(\gamma)$. Ese mismo Corolario y el subsiguiente implican que $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ es una $*-$subálgebra de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$.

De lo mostrado en los resultados anteriores se deduce fácilmente que con las operaciones definidas en el enunciado $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ es un $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})-$módulo a izquierda y un $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})-$módulo a derecha. La compatibilidad de las operaciones de módulo está asegurada pues $|\ \rangle\rangle\colon \mathcal{X}_{\mathrm{si}} \to \mathbb{B}(\mathcal{X}, L^2_\alpha(G,A))$ es inyectivo, y si $a \in \mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$, $b \in \mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ y $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$, entonces

$$|(a\xi) * b\rangle\rangle = (a \circ |\xi\rangle\rangle) \circ \widetilde{\Phi}(b) = a \circ (|\xi\rangle\rangle \circ \widetilde{\Phi}(b)) = |a(\xi * b)\rangle\rangle.$$

En cuanto a la condición (1) (de la Definición B.1) ya sabemos que $\langle\ ,\ \rangle^r$ es $C_c(\mathcal{B}\alpha)-$lineal en la segunda variable, por lo que es $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})-$lineal en la segunda variable. Además $\langle\ ,\ \rangle^l$ es $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})-$lineal en la primera variable porque el mapa $\xi \mapsto |\xi\rangle\rangle$ es lineal.

Las primera igualdad de la condición (2) se deduce inmediatamente porque, por definición, $\langle\langle \xi| = |\xi\rangle\rangle^*$. La segunda igualdad está implícita en el Corolario anterior, y la tercera se probó en el Corolario 5.16.

Para mostrar la condición (3) observamos que las condiciones $\langle \xi, \xi\rangle^r = 0$ y $\langle \xi, \xi\rangle^l = 0$ implican que $|\xi\rangle\rangle = 0$, por lo que $\xi = 0$. El recíproco es inmediato.

La condición (4) se verifica inmediatamente una vez que observamos que $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ y $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ son subálgebras de C*-álgebras. Las afirmaciones (a) y (c) de la tesis se deducen directamente del Corolario anterior. En cuanto a (b) la norma que define $\| \ \|_r$ en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ es $\|\xi\| = \|\langle\langle \xi,\xi\rangle\rangle_\alpha\|_r{}^{1/2} = \|\widetilde{\Phi}(\langle\langle \xi,\xi\rangle\rangle_\alpha)\|^{1/2} = \||\xi\rangle\rangle\|$, que coincide con la norma de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ que define la norma de operadores en $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$. Entonces (Teorema B.4) la norma definida por $\| \ \|_r$ en $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ es la norma de operadores. □

Del Teorema anterior y del Teorema B.4 se deduce inmediatamente lo siguiente.

Corolario 5.21. *Si C es la clausura de $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ en $\mathbb{B}(\gamma)$ y D la de $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ en $A \rtimes_{r,\alpha} G$, entonces la completación de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ con respecto a $\|\xi\|_{si} := \||\xi\rangle\rangle\|$ es un $C-D-$bimódulo de equivalencia de Morita.*

Otro prebimódulo

En principio las ideas de Meyer [Mey01] parecen apuntar a considerar todo el conjunto de elementos cuadrado integrables como un prebimódulo.

Teorema 5.22. *Para cada acción parcial cuadrado integrable, γ de G en $\mathcal{X}$, existe un único anillo ternario $(\mathcal{X}_{si}, (\ ,\ ,\ ))$ donde $(\xi,\eta,\zeta) = |\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle\eta|(\zeta)$.*

En esta situación la $*-$álgebra ${\mathcal{X}_{si}}^l$ (del Teorema B.11) tiene una única C-norma y ella es positiva con respecto a $\mathcal{X}_{si}$ (Definición B.2). Además ${\mathcal{X}_{si}}^r$ tiene una única C*-norma de Cauchy-Schwarz (Definición B.2) con respecto a $\mathcal{X}_{si}$, la cual es positiva.*

Demostración. Sea $(M, (\ ,\ ,\ )')$ el C*-anillo ternario tal que $M = \mathbb{B}(L^2_\alpha(G,A),\mathcal{X})$ y $(R,S,T)' = R\circ S^*\circ T$. Recordemos que $|\ \rangle\rangle \colon \mathcal{X}_{\mathrm{si}} \to M$, $\xi \mapsto |\xi\rangle\rangle$, es un mapa lineal inyectivo. Además el Teorema 4.24, el Corolario 4.28 y el Lema 1.68 implican que para todo $\xi,\eta,\zeta \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ se cumple que $|(\xi,\eta,\zeta)\rangle\rangle = (|\xi\rangle\rangle, |\eta\rangle\rangle, |\zeta\rangle\rangle)'$. Luego el hecho de que $(M, (\ ,\ ,\ )')$ es un anillo ternario implica que $(\mathcal{X}_{\mathrm{si}}, (\ ,\ ,\ ))$ lo es.

Sean ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ y ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^r$ las $*$-álgebras definidas en el enunciado. Para identificar ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ con un $*-$ideal algebraico de $\mathbb{B}(\gamma)$ definimos $\langle\ ,\ \rangle^l \colon {\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^2 \to \mathbb{B}(\gamma)$ como $\langle\xi,\eta\rangle^l := |\xi\rangle\rangle \circ \langle\langle\eta|$ y $\mathbb{B}(\gamma)\times\mathcal{X}_{\mathrm{si}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$, $(T,\xi)\mapsto T(\xi)$. Con estas operaciones $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es un $\mathbb{B}(\gamma)-$módulo a derecha con producto interno definido positivo. Luego $\operatorname{span}\langle\mathcal{X}_{\mathrm{si}},\mathcal{X}_{\mathrm{si}}\rangle^l$ es un $*-$ideal algebraico de $\mathbb{B}(\gamma)$. El Teorema B.11 implica que ese $*-$ideal es isomorfo a ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ y el Lema B.12 nos dice que ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ tiene una única C*-norma.

Identifiquemos ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ con $\operatorname{span}\langle\mathcal{X}_{\mathrm{si}},\mathcal{X}_{\mathrm{si}}\rangle^l$ como indicamos antes. Luego la C*-norma de ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ es la restricción de la C*-norma de $\mathbb{B}(\gamma)$ y la completación de ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ con respecto a ella es la clausura de ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$ en $\mathbb{B}(\gamma)$. Evidentemente para todo $\xi \in \mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ se tiene que

$\langle \xi, \xi \rangle^l = |\xi\rangle\rangle \circ |\xi\rangle\rangle^*$ es positivo en $\mathbb{B}(\gamma)$, y por lo tanto en la completación de ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^l$. Las últimas dos afirmaciones del enunciado se deducen directamente del Teorema B.4. □

El problema del prebimódulo de equivalencia $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ es, como lo nota Meyer, que no siempre se puede identificar a ${\mathcal{X}_{\mathrm{si}}}^r$ con una $*-$subálgebra de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$. Para solucionar este problema Meyer introduce [Mey01] los *continuously square integrable Hilbert modules*. Con las herramientas desarrolladas hasta aquí la teoría de Meyer puede traducirse directamente a las acciones parciales copiando casi textualmente sus enunciados y demostraciones. Los capítulos anteriores de este trabajo son una muestra de ello.

El prebimódulo $\mathcal{X}_{\mathrm{si}}$ tiene otro problema: admite una única norma con la cual puede completarse a un módulo de Hilbert (manteniendo la operación ternaria). Este hecho nos genera un inconveniente porque nos restringe a trabajar con la norma reducida en los productos cruzados, lo que no permite atacar cuestiones referidas a acciones promediables. Ninguna de estas dificultades se observan en el bimódulo $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$.

5.3. Acciones parciales libres

Volvamos a trabajar con un $\sigma-$acción parcial, γ, de G con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}_A)$, como siempre $\alpha := \gamma^r$.

Definición 5.23. Diremos que γ es universalmente saturada si $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ es densa en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con respecto a la C*-norma universal de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$. En general, si $\|\ \|$ es una C*-norma de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$, diremos que γ es $\|\ \|-$saturada si $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ es denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ en la topología definida por $\|\ \|$.

Observación 5.24. Si $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ es denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con respecto a la topología del límite inductivo entonces es $\|\ \|-$saturado con respecto a cualquier C*-norma $\|\ \|$ de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$.

Para tratar la densidad de las acciones parciales débilmente propias necesitamos estudiar primero las acciones parciales propias.

Lema 5.25. *Supongamos que σ es una acción parcial propia de G en $C_0(X)$, por lo que σ tiene una envolvente σ^e en $C_0(X^e)$. Pensemos, de acuerdo con [AMP09], que $C_0(X) \rtimes_\sigma G = C^*(\mathcal{B}\sigma) \subset C^*(\mathcal{B}\sigma^e) = C_0(X^e) \rtimes_{\sigma^e} G$. Luego $\mathcal{F}_c(X) := \mathcal{F}_c(C_0(X)) \subset \mathcal{F}_c(X^e)$, y para toda $f, g \in \mathcal{F}_c(X)$ se cumple que $\langle\langle f, g\rangle\rangle_\sigma = \langle\langle f, g\rangle\rangle_{\sigma^e}$.*

Demostración. La primera inclusión de la tesis se deduce de $\mathcal{F}_c(X) = C_c(X^e)C_0(X) \subset C_c(X^e) = \mathcal{F}(X^e)$. En cambio la igualdad $\langle\langle f, g\rangle\rangle_\sigma = \langle\langle f, g\rangle\rangle_{\sigma^e}$ se obtiene a partir del Corolario 4.44, de la Proposición 5.13 y del Teorema 5.14, después de notar que: (a)

$L^2_\sigma(G, C_0(X))$ es un submódulo de $L^2_{\sigma^e}(G, C_0(X^e))$ y (b) que la restricción de la representación de $C_0(X^e) \rtimes_{\sigma^e} G$ en $\mathbb{B}(L^2_{\sigma^e}(G, C_0(X^e)))$ restringida a $C_0(X) \rtimes_\sigma G$ y comprimida[3] a $\mathbb{B}(L^2_\sigma(G, C_0(X)))$, es la representación de $C_0(X) \rtimes_\sigma G$ en $\mathbb{B}(L^2_\sigma(G, C_0(X)))$. $\square$

Motivados por lo que ocurre para las acciones globales probamos el siguiente

Lema 5.26. *Si σ es una acción parcial libre y propia de G en $C_0(X)$ y definimos $\mathcal{F}^r_c(\mathcal{X}) := \operatorname{span}\langle\langle \mathcal{F}_c(X), \mathcal{F}_c(X)\rangle\rangle_\sigma$, entonces para toda $f \in C_c(\mathcal{B}\sigma)$ existe un compacto $K \subset G$ de manera que $f \in \overline{C_K(\mathcal{B}\sigma) \cap \mathcal{F}^r_c(\mathcal{X})}^{\|\ \|_\infty}$. En particular $\mathcal{F}^r_c(\mathcal{X})$ es denso en $C_c(\mathcal{B}\sigma)$ en la topología del límite inductivo.*

Demostración. Como σ es propia tiene una globalización, σ^e de G en $C_0(X^e)$, también propia. Podemos asumir que X es un abierto de X^e con σ^e-órbita igual a X^e. Luego la Observación 1.13 implica que σ^e es libre.

Usando las ideas de la demostración del Teorema principal de [Rie82] para con σ^e y la acción del grupo trivial $\{e\}$ en X^e deducimos que $U_0 := \operatorname{span}\langle\langle \mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Y)\rangle\rangle_{\sigma^e}$ es denso en $C_c(\mathcal{B}\sigma^e)$ en la topología del límite inductivo. De hecho podemos deducir lo siguiente: para toda $f \in C_c(\mathcal{B}\sigma^e)$ existe un compacto $K \subset G$ de manera que $f \in \overline{C_K(\mathcal{B}\sigma^e) \cap U_0}^{\|\ \|_\infty}$.

Tomemos ahora $f \in C_c(\mathcal{B}\sigma) \subset C_c(\mathcal{B}\sigma^e)$. Lo mencionado antes implica que existen un compacto $K \subset G$ y una sucesión $\{f_n\} \subset C_K(\mathcal{B}\sigma^e) \cap U_0$ tal que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$. Tomemos una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C_0(X)$, de forma que $\{e_i\delta_e\}_i$ es una unidad aproximada del fibrado de Fell $\mathcal{B}\sigma$. Por lo tanto $\lim_i \|g - (e_i\delta_e)g(e_i\delta_e)\|_\infty = 0$, para toda $g \in C_c(\mathcal{B}\sigma)$. Definamos $f^i_n := (e_i\delta_e)g(e_i\delta_e)$ y notemos que $\operatorname{sop}(f^i_n) \subset \operatorname{sop}(f_n) \subset K$, para todo n e i. Por otro lado $\|f^i_n - f\|_\infty \le \|(e_i\delta_e)(f_n - f)(e_i\delta_e)\|_\infty + \|(e_i\delta_e)f(e_i\delta_e) - f\|_\infty$, lo que nos permite encontrar, para cada n, un i_n tal que $\|f^i_n - f_n\|_\infty < 2\|f_n - f\|_\infty + 1/n$. Luego $\{f^{i_n}_n\}_n \subset C_K(\mathcal{B}\sigma^e)$ converge uniformemente a f.

Para terminar nos bastará con mostrar que $f^i_n \in \mathcal{F}^r_c(\mathcal{X})$ pues esto implica que $f \in \overline{C_K(\mathcal{B}\sigma) \cap \mathcal{F}^r_c(\mathcal{X})}^{\|\ \|_\infty}$. Por construcción sabemos que existen $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{F}_c(X^e)$ tales que $f_n = \sum_{k=1}^m \langle\langle g_k, h_k\rangle\rangle_\sigma$. El Teorema 5.14 y el Lema anterior implican

$$\begin{aligned}
f^i_n &= \sum_{k=1}^m (e_i\delta_e)\langle\langle g_k, h_k\rangle\rangle_{\sigma^e}(e_i\delta_e) = \sum_{k=1}^m (e_i\delta_e)\langle\langle g_k, h_k e_i\rangle\rangle_{\sigma^e} = \sum_{k=1}^m (\langle\langle h_k e_i, g_k\rangle\rangle_{\sigma^e}(e_i\delta_e))^* \\
&= \sum_{k=1}^m (\langle\langle h_k e_i, g_k e_i\rangle\rangle_{\sigma^e})^* = \sum_{k=1}^m \langle\langle g_k e_i, h_k e_i\rangle\rangle_{\sigma^e} = \sum_{k=1}^m \langle\langle g_k e_i, h_k e_i\rangle\rangle_\sigma,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que $g_k e_i, h_k e_i \in C_c(X^e)C_0(X) = \mathcal{F}_c(X)$. $\square$

[3] Si A es una C*-subálgebra de $\mathbb{B}(\mathcal{Y})$ y $P \in \mathbb{B}(\mathcal{Y})$ conmuta con todos los elementos de A, la compresión de A a $P\mathcal{Y}$ es la representación $\pi\colon A \to \mathbb{B}(P\mathcal{Y})$, $\pi(a) := A|_{P\mathcal{Y}}$.

Con el siguiente resultado mostramos que en el caso de las acciones libres los productos internos $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ forman un ideal denso del producto cruzado $A \rtimes_\alpha G$.

Teorema 5.27. *Supongamos que σ es una acción parcial propia y libre y que γ es una σ-acción parcial de G con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}_A)$; sea $\alpha := \gamma^r$. Luego para todo $U \subset \mathcal{X}$ que genera un subespacio denso en $\mathcal{X}$ se cumple que*

$$W_U := \operatorname{span}\{\langle\langle \phi(f)\xi, \phi(g)\eta\rangle\rangle_\alpha \colon f, g \in \mathcal{F}_c(X),\ \xi, \eta \in U\}$$

es denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ en la topología del límite inductivo.

Demostración. Comencemos por definir $\theta\colon C_c^\sigma(G, C_0(X)) \to C_c(\mathcal{B}\sigma)$ como $\theta(u)(t) = \Delta(t)^{-1/2}\alpha_t(u(t^{-1}))\delta_t$. Para cada compacto $K \subset G$ la restricción de θ a $C_K^\sigma(G, C_0(X))$, θ_K, es un homeomorfismo lineal de $C_K^\sigma(G, C_0(X))$ a $C_K(\mathcal{B}\sigma)$. Además para toda $f, g \in \mathcal{F}_c(X)$, $\theta([f,g]) = \langle\langle f, g\rangle\rangle_\sigma$ (Teorema 5.14). Con $V := \operatorname{span}[\mathcal{F}_c(X), \mathcal{F}_c(X)]$ el Lema anterior implica que para cada $u \in C_c^\sigma(G, C_0(X))$ existe un compacto $K \subset G$ de manera que $u \in \overline{V \cap C_K^\sigma(G, C_0(X))}^{\|\ \|_\infty}$.

Probemos ahora que para todo $\xi, \eta \in \mathcal{X}$, $t \in G$ y $f, g \in \mathcal{F}_c(X)$ se cumple

$$\langle\langle \phi(f)\xi, \phi(g)\eta\rangle\rangle_\alpha(t) = \Delta(t)^{-1/2}\langle \xi, \gamma_t(\phi([f,g](t^{-1}))\eta)\rangle\delta_t. \tag{5.3.1}$$

En efecto, recordando la construcción de $\langle\langle \phi(f)\xi, \phi(g)\eta\rangle\rangle_\sigma$ que aparece en la prueba del Lema 5.12 y el Corolario 5.17, deducimos que

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi(f)\xi, \phi(g)\eta\rangle\rangle_\alpha(t) &= {\langle\langle \phi(g)\eta, \phi(f)\xi\rangle\rangle_\alpha}^*(t) \\
&= \Delta(t)^{-1}(\Delta(t)^{1/2}\alpha_{t^{-1}}([\phi(g)\eta, \phi(f)\xi](t))\delta_{t^{-1}})^* \\
&= \Delta(t)^{-1/2}[\phi(g)\eta, \phi(f)\xi](t)^*\delta_t \\
&= \Delta(t)^{-1/2}\langle \gamma_t(\phi(\sigma_t^e(f^*)g)\eta), \xi\rangle^*\delta_t \\
&= \Delta(t)^{-1/2}\langle \xi, \gamma_t(\phi(\sigma_{t^{-1}}^e(f^*)g)\eta)\rangle\delta_t \\
&= \Delta(t)^{-1/2}\langle \xi, \gamma_t(\phi([f,g](t^{-1}))\eta)\rangle\delta_t.
\end{aligned}$$

Mantengamos la Ecuación 5.3.1 en mente y llamemos $\overline{W_U}$ a la clausura de W_U en la topología del límite inductivo, la cual es un subespacio porque W_U es un subespacio. Para mostrar que $\overline{W_U} = C_c(\mathcal{B}\alpha)$ apelaremos al Lema A.5; probemos que $C_c(G)\overline{W_U} \subset \overline{W_U}$.

Fijemos $a \in C_c(G)$ y $v \in \overline{W_U}$. Existe una red $\{v_i\}_i \subset W_U$ tal que $v_i \to v$ en el límite inductivo y por lo tanto la convergencia es uniforme en compactos. Dado que $\operatorname{sop}(av), \operatorname{sop}(av_i) \subset \operatorname{sop}(a)$, tenemos que $av_i \to av$ en el límite inductivo. Si logramos mostrar que $av_i \in \overline{W_U}$ (para todo i) esto implicará que $av \in \overline{\overline{W_U}} = \overline{W_U}$. En definitiva debemos mostrar que $C_c(G)W_U \subset \overline{W_U}$, por lo que asumimos $v \in W_U$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que $v = \langle\langle \phi(f)\xi, \phi(g)\eta\rangle\rangle_\alpha$, con $f, g \in \mathcal{F}_c(X)$ y $\xi, \eta \in U$.

Recordando las conclusiones del primer párrafo de esta prueba podemos encontrar $f_1^j, \ldots, f_{m_n}^j \in \mathcal{F}_c(X)$ ($j = 1, 2$ y $n \in \mathbb{N}$) de manera que la función $G \to C_0(X)$, $t \mapsto a(t^{-1})[f, g](t)$, se aproxima uniformemente por $\{\sum_{k=1}^{m_n} [f_k^1, f_k^2]\}_n \subset C_K^\sigma(G, C_0(X))$. Luego, usando la Ecuación 5.3.1, concluimos que la sucesión

$$\{\sum_{k=1}^{m_n} \langle\langle \phi(f_k^1)\xi, \phi(f_k^2)\eta\rangle\rangle_\alpha\}_n \subset C_{K^{-1}}(\mathcal{B}\alpha)$$

converge en la topología del límite inductivo a av. Eso muestra que $av \in \overline{W_U}$.

Una vez que sabemos que $C_c(G)\overline{W_U} \subset \overline{W_U}$, para terminar basta con mostrar que para cada $t \in G$ se cumple que $\{v(t) \colon v \in W_U\}$ es denso en $\mathcal{B}\alpha_t$. Fijemos $t \in G$, $a\delta_t \in \mathcal{B}\alpha_t$ y $\varepsilon > 0$. Como U genera un espacio denso en $\mathcal{X}$, $\phi(C_0(X)_{t^{-1}})U$ genera un espacio denso en $\mathcal{X}_{t^{-1}}$, y por lo tanto $\overline{\operatorname{span}}\,\langle U, \gamma_t(\phi(C_0(X)_{t^{-1}})U)\rangle = A_t$. Luego existen $\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j \in U$ ($j = 1, 2$) y $a_1, \ldots, a_n \in C_0(X)_{t^{-1}}$ de manera que $\|a - \sum_{k=1}^n \langle \xi_k^1, \gamma_t(\phi(a_k)\xi_k^2)\rangle\| < \varepsilon$. Como V es denso en la topología del límite inductivo en $C_c^\sigma(G, C_0(X))$, podemos encontrar $f_1^k, \ldots, f_{m_k}^k \in \mathcal{F}_c(X)$ ($k = 1, \ldots, n$) de manera que $\Delta(t)^{-1/2} \sum_{j=1}^{m_k} [f_j^k, f_j^k](t^{-1})$ aproxima lo suficiente a a_k como para que

$$\|a\delta_t - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \langle\langle \phi(f_j^k)\xi_k^1, \phi(f_j^k)\xi_k^2\rangle\rangle_\alpha(t)\| = \|a - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \Delta(t)^{-1/2} \langle \xi_k^1, \gamma_t([f_j^k, f_j^k](t^{-1})\xi_k^2)\rangle\| < \varepsilon.$$

Esto último implica que $B(a, \varepsilon) \cap \{v(t) \colon v \in W_U\} \neq \emptyset$ y por lo tanto $\{v(t) \colon v \in W_U\}$ es denso en $\mathcal{B}\alpha_t$. □

5.4. Productos internos positivos

El resultado principal de esta sección es que la restricción de la C*-norma universal de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ a $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ es positiva con respecto a $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$. Para mostrar esto adaptaremos la prueba de [BE13] a las acciones parciales.

Proposición 5.28. *Toda acción parcial HLC propia σ de G en X es promediable, es decir que la representación regular $\Lambda^\sigma \colon C_0(X) \rtimes_\sigma G \to \mathbb{B}(L^2(\mathcal{B}\sigma))$ es inyectiva.*

Demostración. Sabemos (Lema 4.8) que σ tiene una globalización σ^e (con espacio envolvente X^e) que también es propia. Es un hecho conocido [Phi89, Teorema 6.1] [BE13, Observación 3.29] que σ^e es promediable y por lo tanto [AMP09] σ también lo es. □

Corolario 5.29. *Si σ es una acción parcial propia de G en $C_0(X)$ entonces $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\sigma$ es definido positivo en $C^*(\mathcal{B}\sigma) = C_0(X) \rtimes_\sigma G$.*

Demostración. El Teorema anterior nos dice que $C^*(\mathcal{B}\sigma) = C^*_r(\mathcal{B}\sigma) = C_0(X) \rtimes_{r,\sigma} G$ y el Corolario 5.19 que $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\sigma$ es definido positivo en $C_0(X) \rtimes_{r,\sigma} G$. $\square$

Supongamos que γ es una σ-acción parcial débilmente propia de G con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}_A)$; como siempre llamaremos α a γ^r.

Llamemos $\mathcal{F}(X)$ a la completación de $\mathcal{F}_c(X)$ con respecto a la norma inducida por la norma reducida (o la universal) a través del producto interno $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\sigma$. La clausura de $\mathcal{F}^r_c(X)$ en $C_0(X) \rtimes_\sigma G$, $\mathcal{F}(X)^r$, es un ideal de $C_0(X) \rtimes_\sigma G$ porque $\mathcal{F}^r_c(X)$ es un $C_c(\mathcal{B}\sigma)-$módulo con producto interno. Entonces la estructura de $\mathcal{F}(X)^r-$módulo de Hilbert de $\mathcal{F}(X)$ se extiende a una estructura de $C_0(X) \rtimes_\sigma G-$módulo de Hilbert. Este nuevo módulo será pleno a derecha si σ es libre (Lema 5.26).

Tomemos el fibrado de Fell Hilbert asociado a γ, $\mathcal{E}\gamma$. El Corolario 2.65 nos da una representación $T\colon \mathcal{B}\sigma \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}\gamma))$. Con la forma integrada de T, $\pi\colon C_0(X) \rtimes_\sigma G \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}\gamma))$, formamos el producto tensorial $\mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma)$.

Tal como lo hicimos para las acciones en álgebras, definamos $C^\gamma_c(G, \mathcal{X}) \to C_c(\mathcal{X}\gamma)$, $f \mapsto f\delta$, donde $f\delta(t) = f(t)\delta_t$, mapa que es un isomorfismo lineal.

Lema 5.30. *Si llamamos $\mathcal{F}_c(X) \otimes C_c(\mathcal{E}\gamma)$ al espacio generado en $\mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma)$ por los elementos de la forma $a \otimes f$, con $a \in \mathcal{F}_c(X)$ y $f \in C_c(\mathcal{E}\gamma)$, entonces existe una única función lineal $U\colon \mathcal{F}_c(X) \otimes C_c(\mathcal{E}\gamma) \to \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ de manera que*

$$U(a \otimes f\delta) = \int_G \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\phi(a)f(t^{-1}))\, dt.$$

Además U es inyectiva y transforma el producto interno de $\mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma)$ en $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$.

Demostración. Llamemos $U[a, f\delta]$ al elemento $\int_G \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\phi(a)f(t^{-1}))\, dt$. Antes que nada debemos mostrar que $U[a, f\delta] \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$. El Lema 5.7 implica que $\gamma_t(\phi(a)f(t^{-1})) = \phi^e(\sigma^e_t(a))\gamma_t(f(t^{-1}))$, donde σ^e es la envolvente de σ, que también es propia. Eso último implica que $\operatorname{sop}(a) \cup \cup_{t\in \operatorname{sop}(f)} \operatorname{sop}(\sigma^e_t(a))$ tiene clausura compacta, y por lo tanto existe $b \in C_c(X^e)$ con valor constante 1 en esa unión. Eso implica, para todo $t \in G$, que

$$\phi^e(b)\gamma_t(\phi(a)f(t^{-1})) = \phi^e(b\sigma^e_t(a))\gamma_t(f(t^{-1})) = \phi^e(\sigma^e_t(a))\gamma_t(f(t^{-1})) = \gamma_t(\phi(a)f(t^{-1})).$$

Entonces $\phi^e(b)U[a, f\delta] = \int_G \Delta(t)^{-1/2}\phi^e(b)\gamma_t(\phi(a)f(t^{-1}))\, dt = U[a, f\delta]$, lo que implica $U[a, f\delta] \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$.

Para mostrar que U está definida apelamos a las propiedades del producto interno de $\overline{\mathcal{F}}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma)$ y $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$ y a la identidad de polarización, con lo cual concluimos que basta con mostrar que $\langle a \otimes f\delta, a \otimes f\delta\rangle = \langle\langle U[a, f\delta], U[a, f\delta]\rangle\rangle_\alpha$. Los cálculos necesarios son extensos, pero no difíciles.

Tomemos una unidad aproximada $\{e_j\}_j$ de $C_0(X)$ contenida en $C_c(X)$. El Lema 5.18 implica que $\{\langle\langle\phi(e_i)U[a, f\delta], \phi(e_i)U[a, f\delta]\rangle\rangle_\alpha\}_i$ converge a $\langle\langle U[a, f\delta], U[a, f\delta]\rangle\rangle_\alpha$ en el límite inductivo. Veamos que también converge a $\langle a \otimes f\delta, a \otimes f\delta\rangle$. Definamos f_i como $f_i(t) = \phi^e(\sigma^e_t(e_i))f(t)$. Luego

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle\phi(e_i)U[a, f\delta], \phi(e_i)U[a, f\delta]\rangle\rangle_\alpha(t) = \Delta(t)^{-1/2}\langle U[a, f], \gamma_t([e_i, e_i](t^{-1})U[a, f])\rangle\delta_t \\
&= \Delta(t)^{-1/2}\int_{G\times G} \Delta(rs)^{-1/2}\langle\gamma_r(\phi(a)f(r^{-1})), \gamma_t(\sigma^e_{t^{-1}}(e_i)e_i\gamma_s(\phi(a)f(s^{-1})))\rangle\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(trs)^{-1/2}\langle\gamma_r(\phi(a)f(r^{-1})), \gamma_{ts}\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}t^{-1}}(e_i)\sigma^e_{s^{-1}}(e_i)a)f(s^{-1})\right)\rangle\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(trs)^{-1/2}\langle\gamma_r(f(r^{-1})), \gamma_{ts}\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}t^{-1}}(e_i\sigma^e_r(a))\sigma^e_{s^{-1}}(e_i)a)f(s^{-1})\right)\rangle\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(rts)^{-1/2}\alpha_r\left(\langle f(r^{-1}), \gamma_{r^{-1}ts}\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}t^{-1}}(e_i\sigma^e_r(a))\sigma^e_{s^{-1}}(e_i)a)f(s^{-1})\right)\rangle\right)\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(rts)^{-1/2}\alpha_{r^{-1}}\left(\langle f(r), \gamma_{rts}\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}t^{-1}}(e_i\sigma^e_{r^{-1}}(a))\sigma^e_{s^{-1}}(e_i)a)f(s^{-1})\right)\rangle\right)\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(s)^{-1/2}\alpha_{r^{-1}}\left(\langle f(r), \gamma_s\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}}(\sigma^e_r(e_i)a)\sigma^e_{s^{-1}rt}(e_i)a)f(s^{-1}rt)\right)\rangle\right)\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(s)^{-1/2}\alpha_{r^{-1}}\left(\langle\phi^e(\sigma^e_r(e_i))f(r), \gamma_s\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}}(a)a)\phi^e(\sigma^e_{s^{-1}rt}(e_i))f(s^{-1}rt)\right)\rangle\right)\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(s)^{-1/2}\alpha_{r^{-1}}\left(\langle f_i(r), \gamma_s\left(\phi(\sigma^e_{s^{-1}}(a)a)f_i(s^{-1}rt)\right)\rangle\right)\, drds\delta_t \\
&= \int_{G\times G} \Delta(s)^{-1/2}\langle f_i\delta(r), \gamma_s\left(\phi(\sigma_{s^{-1}}(a\sigma^e_s(a)))f_i(s^{-1}rt)\right)\delta_{rt}\rangle\, drds \\
&= \int_{G\times G} \langle f_i\delta(r), [\Phi_{\Delta(s)^{-1/2}a\sigma^e_s(a)\delta_s}f_i\delta](rt)\rangle\, drds \\
&= \int_{G\times G} \langle f_i\delta(r), [\Phi_{\langle\langle a,a\rangle\rangle_\sigma(s)}f_i\delta](rt)\rangle\, drds = \int_G \langle f_i\delta(r), [\pi(\langle\langle a, a\rangle\rangle_\sigma)f_i\delta](rt)\rangle\, dr \\
&= \langle f_i\delta, \pi(\langle\langle a, a\rangle\rangle_\sigma)f_i\delta\rangle(t).
\end{aligned}
$$

Hasta ahora mostramos que $\langle\langle\phi(e_i)U[a, f\delta], \phi(e_i)U[a, f\delta]\rangle\rangle_\alpha = \langle f_i\delta, \pi(\langle\langle a, a\rangle\rangle_\sigma)f_i\delta\rangle$, para todo i. La igualdad $\langle\langle U[a, f\delta], U[a, f\delta]\rangle\rangle_\alpha = \langle f\delta, \pi(\langle\langle a, a\rangle\rangle_\sigma)f\delta\rangle$ quedará demostrada una vez que probemos que $\{f_i\}_i$ converge en el límite inductivo a f. De hecho basta con mostrar que la convergencia es uniforme, pues $\mathrm{sop}(f_i) \subset \mathrm{sop}(f)$, para todo i.

Supongamos, por absurdo, que $\{f_i\}_i$ no converge uniformemente a f. Luego existen un $\varepsilon > 0$, una sub red $\{f_{i_j}\}_j$ y una red $\{t_j\}_j$ tal que $\|f_{i_j}(t_j) - f(t_j)\| \geq \varepsilon$. La red $\{t_j\}_j$ debe estar contenida en el soporte de f pues de otra manera $f_{i_j}(t_j) = f(t_j) = 0$. Por lo tanto, pasando a una subred, podemos asumir que $\{t_j\}$ converge a cierto $t \in G$. Luego

$$\|f_{i_j}(t_j) - f(t_j)\| \leq 2\|f(t_j) - f(t)\| + \|\phi^e(\sigma^e_{t_j}(e_{i_j}))f(t) - f(t)\|.$$

Como $2\|f(t_j) - f(t)\| \to 0$, pasando a una subred podemos asumir que $2\|f(t_j) - f(t)\| < \varepsilon/2$. Si logramos acotar, para algún j, el último término por $\varepsilon/2$ habremos llegado a un absurdo. Dado que $f(t) \in \mathcal{X}_t = \phi(C_0(X_t))\mathcal{X}_t$ existe $b \in C_c(X_t)$ de forma que $\|\phi(b)f(t) - f(t)\| < \varepsilon/8$. Luego $\|\phi^e(\sigma^e_{t_j}(e_{i_j}))f(t) - f(t)\| \leq \|\phi(\sigma^e_{t_j}(e_{i_j})a - a)f(t)\| + \varepsilon/4$. Todo lo que tenemos que hacer es mostrar que $\sigma^e_{t_j}(e_{i_j})a \to a$. Para eso observamos que $\sigma^e_{t_j^{-1}}(a) \to \sigma^e_{t^{-1}}(a) \in C_0(X)_{t^{-1}}$ y por lo tanto $e_{i_j}\sigma^e_{t_j^{-1}}(a) \to \sigma^e_{t^{-1}}(a)$, lo que implica que $\sigma^e_{t_j}(e_{i_j})a = \sigma^e_{t_j}(e_{i_j}\sigma^e_{t_j^{-1}}(a)) \to a$. Hemos mostrado que $\{f_i\}_i$ converge a f en el límite inductivo y por lo tanto que U existe, es lineal, y transforma el producto interno de $\overline{\mathcal{F}}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma)$ en $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_\alpha$. Este mismo hecho implica que U es inyectiva pues sabemos que $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ es nulo sii $\langle\langle \xi, \xi\rangle\rangle_\alpha = 0$. $\square$

Teorema 5.31. *Para todo $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ se cumple que $\langle\langle \xi, \xi\rangle\rangle_\alpha \geq 0$ en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$.*

Demostración. Fijemos $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ para mostrar que $\langle\langle \xi, \xi\rangle\rangle_\alpha \geq 0$ en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$. Tomemos una unidad aproximada de $C_0(X)$ contenida en $C_c(X)$, $\{e_i\}_i$. En la demostración del teorema anterior probamos que $\{\langle\langle \phi(e_i)\xi, \phi(e_i)\xi\rangle\rangle_\alpha\}_i$ converge en el límite inductivo a $\langle\langle \xi, \xi\rangle\rangle_\alpha$, por lo que basta con probar que $\langle\langle \phi(a)\xi, \phi(a)\xi\rangle\rangle_\alpha \geq 0$ para toda $a \in C_c(X)$. Llamemos η a $\phi(a)\xi$.

De acuerdo con la Observación 1.8 el conjunto $U_0 := \{s \in G\colon \mathrm{sop}(a) \subset X_s\}$ es un entorno de e. Fijemos un entorno compacto U de e de manera que $U \cup U^{-1} \subset U_0$. Sea $\mathcal{V}$ la familia de entornos compactos de e contenidos en U, ordenada de acuerdo a $V \leq V'$ sii $V' \subset V$. Para cada $V \in \mathcal{V}$ tomemos una función $b_V \in C_V(G)^+$ tal que $\int_G b_V(t^{-1})\,dt = 1$. Por otro lado tomemos $f \in C^\gamma_c(G, \mathcal{X})$ de manera que $f(e) = \xi$. Es decir $f\delta \in C_c(\mathcal{E}\gamma)$ y $f\delta(e) = \xi\delta_e$. Definamos $f_V := b_V f$. Mostraremos que $\{\langle\langle U(a\otimes f_V\delta), U(a\otimes f_V\delta)\rangle\rangle_\alpha\}_{V\in\mathcal{V}}$ converge en la topología del límite inductivo a $\langle\langle \eta, \eta\rangle\rangle_\alpha$, lo que es suficiente para probar la tesis ya que $\langle\langle U(a\otimes f_V\delta), U(a\otimes f_V\delta)\rangle\rangle_\alpha = \langle a\otimes f_V\delta, a\otimes f_V\delta\rangle \geq 0$ en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$.

Para calcular $U(a\otimes f_V\delta)$ debemos integrar $\Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\phi(a)b_V(t^{-1})f(t^{-1}))$. Tomemos $t \in V$, luego $t, t^{-1} \in U_0$ y por lo tanto $a \in C_0(X)_{t^{-1}}$ y

$$\gamma_t(\phi(a)b_V(t^{-1})f(t^{-1})) = \phi(\sigma_t(a))\gamma_t(b_V(t^{-1})f(t^{-1})).$$

El soporte de $\sigma_t(a)$ es $\sigma_t(\mathrm{sop}(a))$ y afirmamos que $Z := \cup_{t\in U}\sigma_t(\mathrm{sop}(a))$ está contenido en un compacto de X. En efecto, $U \times \mathrm{sop}(a)$ es un compacto de Γ_σ y por lo tanto su imagen a través de la función $\Gamma_\sigma \to X$, $(t,x) \mapsto \sigma_t(x)$, es un compacto. Esa imagen es exactamente Z. Tomemos $c \in C_c(X)^+$ con valor constante 1 en Z. Luego, para todo $t \in G$ y $V \in \mathcal{V}$:

$$\phi(c)\gamma_t(\phi(a)b_V(t^{-1})f(t^{-1})) = \phi(c\sigma_t(a))\gamma_t(b_V(t^{-1})f(t^{-1})) = \gamma_t(\phi(a)b_V(t^{-1})f(t^{-1})),$$

lo que implica que $\phi(c)U(a \otimes f_V\delta) = U(a \otimes f_V\delta)$.

Llamemos η_V a $U(a \otimes f_V)$. Afirmamos que basta con mostrar que $\{\eta_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ converge a η. En efecto, si eso es verdad entonces $\phi(c)\eta = \lim_V \phi(c)\eta_V = \lim_V \eta_V = \eta$. Tomemos $c_1, c_2 \in C_c(X)$ tales que $c = c_1c_2$. Considerando la red indexada en $\mathcal{V}$ constante igual a c_1 el Lema 5.18 implica que $\{\langle\langle\phi(c_1c_2)\eta_V, \phi(c_1c_2)\eta_V\rangle\rangle_\alpha\}_{V\in\mathcal{V}}$ converge en el límite inductivo a $\langle\langle\phi(c_1c_2)\eta, \phi(c_1c_2)\eta\rangle\rangle_\alpha$. Es decir que $\{\langle\langle\eta_V, \eta_V\rangle\rangle_\alpha\}_{V\in\mathcal{V}}$ converge en el límite inductivo a $\langle\langle\eta, \eta\rangle\rangle_\alpha$. Como $\langle\langle\eta_V, \eta_V\rangle\rangle_\alpha = \langle U(a\otimes f_V), U(a\otimes f_V)\rangle = \langle a\otimes f, a\otimes f\rangle \geq 0$ en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$ también tendremos que $\langle\langle\eta, \eta\rangle\rangle_\alpha \geq 0$ en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$. Resumiendo: la convergencia de $\{\eta_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ a η implica que $\langle\langle\xi, \xi\rangle\rangle_\alpha$ es positivo en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$.

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos un entorno $V_0 \subset U$ de e de manera que $\|\eta - \gamma_t(\phi(a)f(t^{-1}))\| < \varepsilon/2$ para todo $t \in V_0$, lo que puede hacerse pues γ y f son continuas y $\gamma_e(\phi(a)f(e)) = \eta$. Luego, si $V \geq V_0$:

$$\begin{aligned} \|\eta - \eta_V\| &= \|\int_G b_V(t^{-1})(\eta - \gamma_t(\phi(a)f(t^{-1})))\, dt\| \\ &\leq \int_G b_V(t^{-1})\|\eta - \gamma_t(\phi(a)f(t^{-1}))\|\, dt \leq \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Dada una C*-norma, κ, de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$ denotaremos $C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$ a la completación de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con respecto a esa norma, la cual es una C*-álgebra. Reservamos las expresiones $C^*(\mathcal{B}\alpha)$ y $C^*_r(\mathcal{B}\alpha)$ para las completaciones con respecto a la C*-norma universal y la reducida, respectivamente.

Corolario 5.32. *Para toda C*-norma κ de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$ y para todo $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ se cumple que $\langle\langle\xi, \xi\rangle\rangle_\alpha \geq 0$ en $C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$.*

Ahora podemos hacer de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ un módulo sobre $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con un producto interno definido positivo con respecto a cualquier C*-norma de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$.

Definición 5.33. Dada una C*-norma κ de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$ definimos $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ como la clausura de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ con respecto a la norma $\|\xi\|_\kappa := \kappa(\langle\langle\xi, \xi\rangle\rangle_\alpha)^{1/2}$.

Reservaremos la notación $\mathcal{F}_r(\mathcal{X})$ y $\mathcal{F}_u(\mathcal{X})$ para las completaciones con respecto a la norma reducida y universal, respectivamente.

Naturalmente $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ es un $C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$-módulo de Hilbert. Observemos que la representación $\pi\colon C_0(X)\rtimes_\sigma G\to\mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}\gamma))$ (previa al Lema 5.30) induce una representación $\pi_\kappa\colon C_0(X)\rtimes_\sigma G\to\mathbb{B}(C^*_\kappa(\mathcal{E}\gamma))$ porque, si $q_\kappa\colon C^*(\mathcal{B}\alpha)\to C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$ es el mapa cociente, entonces $C^*_\kappa(\mathcal{E}\gamma)=C^*(\mathcal{E}\gamma)\otimes_{q_\kappa}C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$.

Tal como en el caso de las acciones globales [BE13] tenemos lo siguiente:

Teorema 5.34. *Los módulos $\mathcal{F}(X)\otimes_{\pi_\kappa}C^*_\kappa(\mathcal{E}\gamma)$ y $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ son unitariamente equivalentes. Es más, la función U del Lema 5.30 se extiende a un unitario.*

Demostración. Como $C^*_\kappa(\mathcal{E}\gamma)=C^*(\mathcal{E}\gamma)\otimes_{q_\kappa}C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$ y $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})=\mathcal{F}_u(\mathcal{X})\otimes_{q_\kappa}C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$; basta mostrar la tesis para la norma universal. Por esta razón omitimos el subíndice κ, ya que la norma será la universal.

La función U del Lema 5.30 es una isometría pues preserva el producto interno, por lo tanto tiene una extensión a $\mathcal{F}_u(\mathcal{X})\otimes C^*(\mathcal{E}\gamma)$. Por comodidad llamaremos U a esa extensión. Observemos que el rango de U, $Ran(U)$, es cerrado, pues U es una isometría. Tan sólo nos resta mostrar que $Ran(U)=\mathcal{F}_u(\mathcal{X})$.

Fijemos $\xi\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ y tomemos una unidad aproximada $\{e_i\}_i\subset C_c(X)$ de $C_0(X)$. Usando el Lema 5.18 y las ideas que aparecen en la segunda parte de su demostración deducimos que las redes $\{\langle\langle\phi(e_i)\xi,\xi\rangle\rangle_\alpha\}_i$, $\{\langle\langle\xi,\phi(e_i)\xi\rangle\rangle_\alpha\}_i$ y $\{\langle\langle\phi(e_i)\xi,\phi(e_i)\xi\rangle\rangle_\alpha\}_i$ convergen a $\langle\langle\xi,\xi\rangle\rangle_\alpha$ en la topología del límite inductivo. Eso implica que $\langle\langle\xi-\phi(e_i)\xi,\xi-\phi(e_i)\xi\rangle\rangle_\alpha$ converge a cero en el límite inductivo, es decir que $\phi(e_i)\xi\to\xi$ en $\mathcal{F}_u(\mathcal{X})$. Entonces basta con mostrar que $\phi(C_c(X))\mathcal{X}\subset Ran(U)$.

Fijemos $\phi(a)\xi\in\phi(C_c(X))\mathcal{X}$ y tomemos la red $\{\eta_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ que construimos en la demostración del Teorema 5.31 y la función $c\in C_c(X)$ también de aquella demostración, de manera que $\eta_V\to\phi(a)\xi$ y $\phi(c)\eta_V=\eta_V$, para todo $V\in\mathcal{V}$. Si escribimos $c=c_1c_2$ y usamos el Lema 5.18 con la red constante igual a c_1 deducimos que las redes $\{\langle\langle\eta_V,\phi(a)\xi\rangle\rangle_\alpha\}_i$, $\{\langle\langle\phi(a)\xi,\eta_V\rangle\rangle_\alpha\}_i$ y $\{\langle\langle\eta_V,\eta_V\rangle\rangle_\alpha\}_i$ convergen en el límite inductivo a $\langle\langle\phi(a)\xi,\phi(a)\xi\rangle\rangle_\alpha$. Esto último implica que $\eta_V\to\phi(a)\xi$ en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ porque implica que $\langle\langle\phi(a)\xi-\eta_V,\phi(a)\xi-\eta_V\rangle\rangle_\alpha\to 0$ en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$. Además sabemos que $\{\eta_V\}_{V\in\mathcal{V}}\subset Ran(U)$, por lo que $\phi(a)\xi\in Ran(U)$. □

De la demostración extraemos la siguiente conclusión.

Corolario 5.35. *$\phi(C_c(X))\mathcal{X}$ es denso en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$, para cualquier C^*-norma κ de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$.*

Para obtener teoremas de equivalencia de Morita usando el módulo $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ apelaremos a los Teoremas 5.20 y B.4.

El álgebra $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ puede pensarse como una $*-$subálgebra densa de $\mathbb{K}(\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X}))$, para cualquier C*-norma κ de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$. La norma en $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ correspondiente a κ es

$$_\kappa\|T\| := \sup\{\kappa(\langle\langle T\xi, T\xi\rangle\rangle_\alpha)^{1/2} \colon \xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\ \kappa(\langle\langle \xi, \xi\rangle\rangle_\alpha) \leq 1\}.$$

Llamemos $\mathcal{F}_\kappa^l(\mathcal{X})$ a la completación de $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$ con respecto a $_\kappa\|\ \|$ y $\mathcal{F}_\kappa^r(\mathcal{X})$ a la completación de $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$ con respecto a κ.

Teorema 5.36. *Para cada C*-norma, κ, de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$ el módulo $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ es un $\mathcal{F}_\kappa^l(\mathcal{X}) - \mathcal{F}_\kappa^r(\mathcal{X})-$bimódulo de equivalencia de Morita. Si la acción de G en X es libre, o simplemente si* $\operatorname{span}\langle\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{X}), \mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle_\alpha$ *es $\kappa-$denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$, entonces $\mathcal{F}_\kappa^r(\mathcal{X}) = C_\kappa^*(\mathcal{B}\alpha)$ y $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ es un $\mathcal{F}_\kappa^l(\mathcal{X}) - C_\kappa^*(\mathcal{B}\alpha)-$bimódulo de equivalencia de Morita.*

Demostración. Ver la discusión anterior y los Teoremas 5.27 y B.4. □

5.5. Acciones parciales Kasparov propias

Este tipo de acciones son casos particulares de las acciones débilmente propias. Recordemos que el centro de un álgebra B es $\mathcal{Z}(B) := \{b \in B \colon bc = cb\ \forall\, c \in B\}$. Un homomorfismo de álgebras $\pi \colon B \to C$ se dice central si $\pi(B) \subset \mathcal{Z}(C)$.

Definición 5.37. Supongamos que G es un grupo HLC, σ una acción parcial HLC de G en X y γ una acción parcial en módulos de Hilbert de G en $\mathcal{X}$. Diremos que γ es una $\sigma-$acción central (con respecto a ϕ) si existe un $*-$homomorfismo fuertemente no degenerado, equivariante y central $\phi \colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$. Asimismo diremos que γ es una $\sigma-$acción parcial Kasparov propia con estructura ϕ si γ es una $\sigma-$acción central con respecto a ϕ y σ es propia. Una acción parcial Kasparov propia es una acción parcial en un módulo de Hilbert que es una $\sigma-$acción parcial de Kasparov, con respecto a alguna acción parcial σ.

Observación 5.38. Toda $\sigma-$acción parcial central (con respecto a ϕ) es una $\sigma-$acción parcial (con respecto a ϕ) y toda $\sigma-$acción parcial Kasparov propia con estructura ϕ es una $\sigma-$acción parcial débilmente propia con estructura ϕ.

Como contraparte de la Proposición 5.4, del Teorema 5.5 y el Corolario 5.6 tenemos los siguientes resultados.

Corolario 5.39. *γ es una $\sigma-$acción parcial central con respecto a $\phi \colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ si y solamente γ^l es una $\sigma-$acción parcial central con respecto a ϕ.*

Demostración. El hecho de que ϕ sea central no depende de γ ni de σ, y por lo tanto la Proposición 5.4 implica lo que queremos mostrar. □

Corolario 5.40. *Supongamos que γ es una $\sigma-$acción parcial central con respecto a $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ y que σ tiene una globalización. Luego γ^l es globalizable. Si τ y β son las envolventes de σ y γ, respectivamente, y pensamos a σ y γ como restricciones de τ y β; entonces existe un único $*-$homomorfismo ϕ^e de manera que β es una $\tau-$acción global central con respecto a ϕ^e y $\phi^e(a)T = \phi(a)T$, para todo $a \in C_0(X)$ y $T \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$.*

Demostración. Se deduce del Teorema 5.5 y del Corolario 3.13. □

Corolario 5.41. *Si γ es una $\sigma-$acción parcial Kasparov propia con estructura ϕ entonces σ y γ^l son globalizables y la envolvente de σ es propia. Además, tomando τ, β y ϕ^e como en el enunciado del Corolario anterior, se cumple que β es una $\tau-$acción global Kasparov propia con estructura ϕ^e.*

Demostración. Se deduce directamente del Corolario anterior y del Corolario 5.6. □

Para las acciones parciales Kasparov propias el álgebra $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ del Teorema 5.20 admite una única C*-norma por lo que todas las completaciones $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$ son iguales, como vemos a continuación:

Teorema 5.42. *Si γ es una $\sigma-$acción parcial de Kasparov entonces el álgebra $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ del Teorema 5.20 es un $*$-ideal algebraico de $\mathbb{B}(\gamma)$. Además $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ tiene una única C*-norma y la restricción a $\mathcal{F}^r_c(\mathcal{X})$ de cualquier C*-norma de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$ coincide con la restricción de la norma reducida.*

Demostración. Para mostrar que $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ es un $*$-ideal de $\mathbb{B}(\gamma)$ basta con mostrar que $T \circ |\xi\rangle\rangle \circ |\eta\rangle\rangle^* \subset \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ para toda $T \in \mathbb{B}(\gamma)$ y $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}) = \phi(C_c(X^e)C_0(X))\mathcal{X}$. Para demostrar esto último escribimos $\xi = \phi(a)\xi'$, con $a \in C_c(X^e)C_0(X)$. Luego

$$T \circ |\xi\rangle\rangle \circ |\eta\rangle\rangle^* = |T \circ \phi(a)\xi'\rangle\rangle \circ |\eta\rangle\rangle^* = |\phi(a) \circ T(\xi')\rangle\rangle \circ |\eta\rangle\rangle^* \subset \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X}).$$

El Lema B.12 nos dice que la única C*-norma de $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ es la restricción de la norma de $\mathbb{B}(\gamma)$. Los Teoremas 5.31 y B.4 implican el resto de las afirmaciones. □

Del siguiente resultado veremos dos demostraciones, una corta basada en que lo que mostraremos es conocido para acciones globales, y otra más larga basada en el Teorema anterior. La primera nos interesa porque muestra la interacción de las acciones globales y parciales y la segunda porque como corolario de ella obtenemos algunas equivalencias de Morita que son conocidas para las acciones globales.

Teorema 5.43. *Si γ es una acción parcial de Kasparov propia entonces γ^r y γ^l son promediables.*

Demostración. El Corolario 2.62 nos dice que basta con probar que γ^l es promediable. El Corolario 5.41 nos dice que γ^l es globalizable y que su globalización es Kasparov propia. Luego [AMP09] basta con mostrar que esa globalización es propia. En definitiva hemos reducido el problema a demostrar que toda acción global Kasparov propia (en una C*-álgebra) es promediable, y esto se deduce de la Observación 3.29 de [BE13]. $\square$

Demostración alternativa del Teorema 5.43. Supongamos que γ es una σ-acción parcial de Kasparov con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$.

Usando el homomorfismo canónico $\mathbb{C} \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$, $z \mapsto z1$, y la representación regular a izquierda $\lambda\colon G \to B(L^2(G))$ formemos el producto tensorial $L^2G\mathcal{X} := L^2(G) \otimes \mathcal{X}$ con la acción parcial $\delta := \lambda \otimes \gamma$.

Afirmamos que existe un único homomorfismo equivariante, fuertemente no degenerado y central $\psi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(L^2G\mathcal{X})$ tal que $\psi(a)(f \otimes \xi) = f \otimes \phi(a)\xi$. En otras palabras ψ es la composición de ϕ con $\mathbb{B}(\mathcal{X}) \to \mathbb{B}(L^2(G) \otimes \mathcal{X})$, $T \mapsto 1 \otimes T$ (ver el Ejemplo 4.6).

Para ver que ψ es fuertemente no degenerado observamos que para todo $t \in G$:

$$\psi(C_0(X)_t)L^2G\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span}}\, L^2(G) \otimes \phi(C_0(X)_t)\mathcal{X} = \overline{\operatorname{span}}\, L^2(G) \otimes \mathcal{X}_t = L^2G\mathcal{X}_t.$$

El hecho de que ψ es equivariante se deduce de que para todo $f \in L^2(G)$, $\xi \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$, $a \in C_0(X)_{t^{-1}}$ y $t \in G$:

$$\delta_t(\psi(a)(f \otimes \xi)) = \lambda_t(f) \otimes \phi(\sigma_t(a))\gamma_t(\xi) = \psi(\sigma_t(a))(\lambda_t(f) \otimes \gamma_t(\xi)) = \psi(\sigma_t(a))\delta_t(f \otimes \xi).$$

Para mostrar que ψ es central apelaremos a la demostración del Corolario 3.13 que nos dice que basta con mostrar que cada $\psi(a)$ conmuta con todos los elementos de $\mathbb{K}(L^2G\mathcal{X})$. En realidad basta mostrar que conmuta con todos los elementos de $\mathbb{K}(L^2G\mathcal{X})$ de la forma $|f \otimes \xi\rangle\langle g \otimes \eta|$, y esto se cumple pues:

$$\begin{aligned}\psi(a)|f \otimes \xi\rangle\langle g \otimes \eta|(h \otimes \zeta) &= f \otimes \phi(a)\xi\langle \eta, \langle g, h\rangle \zeta\rangle = f \otimes \phi(a)|\xi\rangle\langle\eta|(\langle g, h\rangle\zeta) \\ &= f \otimes |\xi\rangle\langle\eta|(\langle g, h\rangle\phi(a)\zeta) = f \otimes \xi\langle\eta, \langle g, h\rangle\phi(a)\zeta\rangle \\ &= |f \otimes \xi\rangle\langle g \otimes \eta|\psi(a)(h \otimes \zeta).\end{aligned}$$

Con esto mostramos que δ es una $\sigma-$acción parcial de Kasparov. Veamos ahora que $U_0 := \operatorname{span}\langle\langle L^2G\mathcal{F}_c(\mathcal{X}), L^2G\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\rangle_\alpha$ es denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con la topología del límite inductivo. Para esto observemos que para $a, b \in C_c(X^e)C_0(X)$:

$$\begin{aligned}\langle\langle \psi(a)(f\otimes\xi), \psi(b)(g\otimes\eta)\rangle\rangle_\alpha(t) &= \Delta(t)^{-1/2}\langle f\otimes\xi, \delta_t(\psi(\sigma^e_{t^{-1}}(a^*)b)(g\otimes\eta))\rangle\delta_t\\ &= \Delta(t)^{-1/2}\langle \xi, \langle f, \lambda_t(g)\rangle\gamma_t(\phi(\sigma^e_{t^{-1}}(a^*)b)\eta)\rangle\delta_t\\ &= \langle f, \lambda_t(g)\rangle\langle\langle\phi(a)\xi, \phi(b)\eta\rangle\rangle_\alpha(t).\end{aligned}$$

Llamemos Θ al subespacio de $C_c(G)$ generado por las funciones de la forma $t \mapsto \langle f, \lambda_t(g)\rangle$. Para mostrar que Θ es denso con respecto a la topología del límite inductivo consideremos la acción por traslación a izquierda de G en G, $\tau_s(t) = st$, y la representación por operadores de multiplicación $\rho\colon C_0(G) \to B(L^2(G))$. Mediante cálculos sencillos puede demostrarse que λ es una $\tau-$acción parcial. Como τ es libre y propia las funciones de la forma $\langle\langle f, g\rangle\rangle_\tau$ $(f, g \in C_c(G))$ generan un subespacio denso de $C_c(G)$ en el límite inductivo (Teorema 5.27). Además sabemos que $\langle\langle f, g\rangle\rangle_\tau(t) = \Delta(t)^{-1/2}\langle f, \lambda_t(g)\rangle$. Multiplicando por $t \mapsto \Delta(t)^{1/2}$ deducimos que cualquier elemento de $C_c(G)$ puede aproximarse en el límite inductivo por funciones de la forma $t \mapsto \langle f, \lambda_t(g)\rangle$, las cuales pertenecen a Θ.

Los cálculos hechos más arriba implican que $\Theta U_0 \subset U_0$; luego el Lema A.5 nos dice que para mostrar que U_0 es denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ con la topología del límite inductivo basta con mostrar que para cada $t \in G$, $\{v(t)\colon v \in v \in U_0\}$ es denso en $\mathcal{B}\alpha_t$, lo que se deduce directamente de la demostración del Teorema 5.27 (notar que la hipótesis de que la acción sea libre no es necesaria en este punto).

En este punto sabemos que el álgebra $\mathcal{F}^r_c(L^2G\mathcal{X})$ es densa en la topología del límite inductivo en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ y por lo tanto separa las C*-normas dominadas por la norma universal. El Teorema anterior nos dice que todas esas normas coinciden cuando las restringimos a $\mathcal{F}^r_c(L^2G\mathcal{X})$ y por lo tanto la norma reducida de $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ coincide con la norma universal. Esto muestra que $\alpha = \gamma^r$ es promediable. El Corolario 2.62 implica que γ^l es promediable. $\square$

En la demostración anterior usamos que ϕ es central en dos oportunidades: para mostrar que ψ es central y para deducir que $\mathcal{F}^r_c(L^2G\mathcal{X})$ tiene una única C*-norma dominada por la universal. El resto de la construcción puede realizarse independientemente de si ϕ es central. Luego podemos afirmar que, en general, $\mathcal{F}^r_c(L^2G\mathcal{X})$ es denso en $A \rtimes_{\gamma^r} G$ en la topología del límite inductivo. Como consecuencia inmediata de la demostración de arriba obtenemos lo siguiente.

Corolario 5.44. *Supongamos que γ es una $\sigma-$acción parcial débilmente (Kasparov) propia con estructura $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ y llamemos δ a la acción parcial de G en $L^2G\mathcal{X}$ obtenida como el producto tensorial de la representación regular a izquierda $\lambda\colon G \to$*

$B(L^2(G))$ y γ. Definamos $\psi\colon C_0(X)\to\mathbb{B}(L^2G\mathcal{X})$ como el único $*-$homomorfismo tal que $\psi(a)=1\otimes\phi(a)$. Luego ψ es fuertemente no degenerado y equivariante, por lo que δ es una $\sigma-$acción parcial débilmente (resp. Kasparov) propia. Además $\delta^r=\gamma^r=:\alpha$. También se cumple que $\mathcal{F}_c^r(L^2G\mathcal{X})$ es denso en $C_c(\mathcal{B}\alpha)$ en la topología del límite inductivo.

El Corolario anterior puede combinarse con el Teorema 5.36 para obtener Teoremas de equivalencia de Morita que involucran los productos cruzados $C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$ ya que la clausura de $\mathcal{F}_c^r(L^2G\mathcal{X})$ en $C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$ es $C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha)$.

5.6. La situación del lado izquierdo

En las secciones anteriores hemos estudiado a $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ como módulo a derecha describiendo su álgebra $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X})$. Ahora es momento de dar una descripción más detallada de $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X})$. Haremos esto imitando el Lema 2.5 de [BE14].

Fijemos una $\sigma-$acción parcial débilmente propia γ con estructura $\phi\colon C_0(X)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$; como siempre G será el grupo que actúa parcialmente. Definamos

$$\mathbb{F}_c(\mathcal{X}):=\operatorname{span}|\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})|=\operatorname{span}\phi(C_c(X^e)\cap C_0(X))|\mathcal{X}\rangle\langle\mathcal{X}|\phi(C_c(X^e)\cap C_0(X))$$

$$\mathbb{K}_c(\mathcal{X}):=\phi(C_c(X^e)\cap C_0(X))\mathbb{K}(\mathcal{X})\phi(C_c(X^e)\cap C_0(X)).$$

Observación 5.45. $\mathbb{F}_c(\mathcal{X})=\phi^e(C_c(X^e)|\mathcal{X}\rangle\langle\mathcal{X}|\phi^e(C_c(X^e))$. Además $\mathbb{F}_c(\mathcal{X})$ y $\mathbb{K}_c(\mathcal{X})$ son $*-$subálgebras densas de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$.

Lema 5.46. *Considerando a γ^l como una $\sigma-$acción parcial débilmente propia (Proposición 5.4) tenemos que $\mathbb{B}(\gamma^l)=\mathbb{B}(\gamma)$ y $\mathbb{K}_c(\mathcal{X})=\mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))=\mathbb{K}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$.*

Demostración. Veamos que $\mathbb{B}(\gamma)\subset\mathbb{B}(\gamma^l)$. Debemos mostrar que para todo $T\in\mathbb{B}(\gamma)$, $S\in\mathbb{K}(\mathcal{X})_{t^{-1}}$ y $t\in G$ se cumple que $\gamma_t^l(TS)=T\gamma_t^l(S)$. Como $\operatorname{span}|\mathcal{X}_{t^{-1}}\rangle\langle\mathcal{X}_{t^{-1}}|$ es denso en $\mathbb{K}(\mathcal{X})_{t^{-1}}$ basta con mostrar la igualdad para $S\in|\mathcal{X}_{t^{-1}}\rangle\langle\mathcal{X}_{t^{-1}}|$. Por otra parte, si $S\in\mathbb{K}(\mathcal{X})_t$, entonces $\gamma_t^l(TS),T\gamma_t^l(S)\in\mathbb{K}(\mathcal{X})_t$, y esto implica que basta con mostrar que para todo $\xi,\eta\in\mathcal{X}_{t^{-1}}$ y $\zeta\in\mathcal{X}_t$ se cumple que $\gamma_t^l(T|\xi\rangle\langle\eta|)(\zeta)=T\gamma_t^l(|\xi\rangle\langle\eta|)(\zeta)$. Esto es verdad, pues

$$\gamma_t^l(T|\xi\rangle\langle\eta|)(\zeta)=\gamma_t^l(|T\xi\rangle\langle\eta|)(\zeta)=\gamma_t(T\xi)\langle\gamma_t(\eta),\zeta\rangle=T\gamma_t(\xi)\langle\gamma_t(\eta),\zeta\rangle=T\gamma_t^l(|\xi\rangle\langle\eta|)(\zeta).$$

Recíprocamente, si $T\in\mathbb{B}(\gamma^l)$ y $\xi\in\mathcal{X}_{t^{-1}}$, para mostrar que $\gamma_t(T\xi)=T\gamma_t(\xi)$ basta con probar que $\gamma_t(T\xi)\langle\eta,\zeta\rangle=T\gamma_t(\xi)\langle\eta,\zeta\rangle$, para todos $\eta,\zeta\in\mathcal{X}_t$, porque $\gamma_t(T\xi),T\gamma_t(\xi)\in\mathcal{X}_t$.

Para todos $\eta,\zeta\in\mathcal{X}_t$ se cumple que

$$\begin{aligned}\gamma_t(T\xi)\langle\eta,\zeta\rangle &= |\gamma_t(T\xi)\rangle\langle\gamma_t(\gamma_{t^{-1}}(\eta))|(\zeta) = \gamma_t^l(|T\xi\rangle\langle\gamma_{t^{-1}}(\eta)|)(\zeta) = \gamma_t^l(T|\xi\rangle\langle\gamma_{t^{-1}}(\eta)|)(\zeta)\\ &= T\gamma_t^l(|\xi\rangle\langle\gamma_{t^{-1}}(\eta)|)(\zeta) = T\gamma_t(\xi)\langle\eta,\zeta\rangle.\end{aligned}$$

Para mostrar las últimas igualdades del enunciado recordemos que como $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ es una C*-álgebra $\mathbb{K}(\mathcal{X}) = \mathbb{K}(\mathcal{X})^*\mathbb{K}(\mathcal{X}) = |\mathbb{K}(\mathcal{X})\rangle\langle\mathbb{K}(\mathcal{X})|$, lo que implica $\mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X})) = \mathbb{K}_c(\mathcal{X})$. Además $\mathbb{K}(\mathbb{K}(\mathcal{X})) = \mathbb{K}(\mathcal{X})$, lo que junto con lo mencionado al inicio del párrafo implica que $\mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X})) = \mathbb{K}_c(\mathcal{X})$. $\square$

Teorema 5.47. *Existe una única función lineal $\mathbb{E}^\gamma\colon \mathbb{K}_c(\mathcal{X})\to\mathbb{B}(\gamma)$ de manera que para todo $T\in\mathbb{K}_c(\mathcal{X})$, $\zeta\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ y toda unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $C_0^\alpha(G,A)$ contenida en $C_c^\alpha(G,A)$ se cumple que*

$$\mathbb{E}^\gamma(T)(\zeta) = \lim_i \int_G \gamma_t\left(T(\gamma_{t^{-1}}(\zeta e_i(t)))\right)\, dt. \tag{5.6.1}$$

Demostración. La unicidad se deduce de la fórmula del enunciado. Para mostrar la existencia definamos primero $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}_c(\mathcal{X})$. Veremos que podemos definir $\mathbb{E}$ como $\mathbb{E}(|\xi\rangle\langle\eta|) = |\xi\rangle\rangle\langle\langle\eta|$, para lo cual necesitamos mostrar que el límite de la Ecuación 5.6.1 es $|\xi\rangle\rangle\langle\langle\eta|(\zeta)$.

Fijemos $\xi,\eta,\zeta\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ y tomemos una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ como en el enunciado. Recordemos (Proposición 5.13 y Lema 5.12) que $\langle\langle\eta|(\zeta) = [\eta,\zeta]\in C_c^\alpha(G,A)$. Como la red $\{[\eta,\zeta]e_i\}_i$ converge uniformemente a $[\eta,\zeta]$ y todos sus elementos tiene soporte contenido en el soporte de $[\eta,\zeta]$:

$$|\xi\rangle\rangle\langle\langle\eta|(\zeta) = |\xi\rangle\rangle([\eta,\zeta]) = \lim_i |\xi\rangle\rangle([\eta,\zeta]e_i) = \lim_i \int_G \gamma_t(\xi\alpha_{t^{-1}}([\xi,\eta](t)e_i(t)))\, dt.$$

Si logramos mostrar que $u(t) := \xi\alpha_{t^{-1}}([\xi,\eta](t)e_i(t)) = |\xi\rangle\langle\eta|(\gamma_{t^{-1}}(\zeta e_i(t))) =: v(t)$ (para todo $t\in G$) entonces

$$|\xi\rangle\rangle\langle\langle\eta|(\zeta) = \lim_i \int_G \gamma_t\left(|\xi\rangle\langle\eta|(\gamma_{t^{-1}}(\zeta e_i(t)))\right)\, dt, \tag{5.6.2}$$

lo que nos permitirá definir $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}_c(\mathcal{X})$.

Para mostrar que $u(t) = v(t)$ observemos que $v(t) = \xi\langle\eta,\gamma_{t^{-1}}(\zeta e_i(t))\rangle$ y por lo tanto bastará con probar que $u'(t) := \alpha_{t^{-1}}([\xi,\eta](t)e_i(t)) = \langle\eta,\gamma_{t^{-1}}(\zeta e_i(t))\rangle =: v'(t)$. Como $u'(t), v'(t)\in A_{t^{-1}}$ y $A_{t^{-1}}$ tiene unidades aproximadas, la igualdad $u'(t) = v'(t)$ se deduce de que para todo $c\in A_{t^{-1}}$ se cumple que $cu'(t) = cv'(t)$, lo que mostramos a continuación (usando el Lema 5.12):

$$\begin{aligned} cu'(t) &= c\alpha_{t^{-1}}([\eta,\zeta](t)e_i(t)) = \alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(c)[\eta,\zeta](t)e_i(t)) = \alpha_{t^{-1}}(\langle\gamma_t(\eta c^*),\zeta\rangle e_i(t)) \\ &= \alpha_{t^{-1}}(\langle\gamma_t(\eta c^*),\zeta e_i(t)\rangle) = \langle\eta c^*,\alpha_{t^{-1}}(\zeta e_i(t))\rangle = cv'(t). \end{aligned}$$

Hasta ahora tenemos una función lineal $\mathbb{E}\colon \mathbb{F}_c \to \mathbb{B}(\gamma)$ que cumple con la Ecuación 5.6.1. Para extender $\mathbb{E}$ a $\mathbb{K}_c(\mathcal{X})$ usaremos lo que acabamos de mostrar tomando γ^l en lugar de γ. Entonces tenemos una función $\mathbb{E}^{\gamma^l}\colon \mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X})) \to \mathbb{B}(\gamma^l)$ tal que para todo $T \in \mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$, $S \in \mathcal{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ y unidad aproximada $\{f_j\}_j$ de $C_0^{\gamma^l}(G,\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ contenida en $C_c^{\gamma^l}(G,\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ se cumple que

$$\mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(S) = \lim_j \int_G \gamma^l_t\left(T(\gamma^l_{t^{-1}}(Sf_j(t)))\right) dt. \tag{5.6.3}$$

El Lema anterior nos dice que $\mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X})) = \mathbb{K}_c(\mathcal{X})$ y que $\mathbb{B}(\gamma^l) = \mathbb{B}(\gamma)$, así que el dominio de $\mathbb{E}^{\gamma^l}$ es $\mathbb{K}_c(\mathcal{X})$ y el codominio es $\mathbb{B}(\gamma)$. Tomemos $T \in \mathbb{K}_c(\mathcal{X})$, $\zeta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ y $\{e_i\}_i$ una unidad aproximada de $C_0^\alpha(G,A)$ contenida en $C_c^\alpha(G,A)$. Por construcción existen $a \in \mathcal{F}_c(X)$ y $\zeta' \in \mathcal{X}$ de manera que $\zeta = \phi(a)\zeta'$. Además existen $S \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$ y $\zeta'' \in \mathcal{X}$ tales que $\zeta' = S\zeta''$. En definitiva $\zeta = \phi(a)S\zeta''$. Observemos que $S' := \phi(a)S \in \mathcal{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ y que $\mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(\zeta) = \mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(S')(\zeta'')$.

De los argumentos usados para definir $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}_c(\mathcal{X})$ deducimos que existe una función $h \in C_c^{\gamma^l}(G,\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ de manera que la red $\{t \mapsto \gamma^l_t\left(T(\gamma^l_{t^{-1}}(S'f_j(t)))\right)\}_j$ converge uniformemente a h y los soportes de todos sus elementos están contenidos en el soporte de h. Luego

$$\mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(\zeta) = \mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(S')(\zeta'') = \int_G h(t)\,dt(\zeta'') = \int_G h(t)(\zeta'')\,dt.$$

Para cada i el soporte de $t \mapsto h(t)(\zeta'' e_i(t))$ está contenido en el soporte de h y, puesto que $t \mapsto h(t)(\zeta'') \in C_c^\gamma(G,\mathcal{X})$ y $\{t \mapsto h(t)(\zeta'' e_i(t))\}_i$ converge uniformemente a $t \mapsto h(t)(\zeta'')$, se tiene

$$\mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(\zeta) = \lim_i \int_G h(t)(\zeta'' e_i(t))\,dt = \lim_i \lim_j \int_G \gamma^l_t\left(T(\gamma^l_{t^{-1}}(S'f_j(t)))\right)(\zeta'' e_i(t))\,dt.$$

Por otro lado, para todo $R \in \mathbb{K}(\mathcal{X})_{t^{-1}}$ y $\xi \in \mathcal{X}_t$ se cumple que $\gamma^l_t(R)(\xi) = \gamma_t(T\gamma_{t^{-1}}(\xi))$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\gamma^l}(T)(\zeta) &= \lim_i \lim_j \int_G \gamma_t \left(T(\gamma^l_{t^{-1}}(S' f_j(t)))\gamma_{t^{-1}}(\zeta'' e_i(t)) \right) dt \\
&= \lim_i \lim_j \int_G \gamma_t \left(T(\gamma_{t^{-1}}(S' f_j(t)\zeta'' e_i(t))) \right) dt \\
&= \lim_i \int_G \gamma_t \left(T(\gamma_{t^{-1}}(S'\zeta'' e_i(t))) \right) dt \\
&= \lim_i \int_G \gamma_t \left(T(\gamma_{t^{-1}}(\zeta e_i(t))) \right) dt,
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se deduce de que para todo i la red $\{t \mapsto f_j(t)\zeta'' e_i(t)\}_j$ converge uniformemente a $t \mapsto \zeta'' e_i(t)$, y los soportes de todos sus elementos están contenidos en el soporte de $t \mapsto \zeta'' e_i(t)$.

De lo expuesto anteriormente deducimos que $\mathbb{E}^{\gamma^l}$ es la función que buscamos. $\square$

Corolario 5.48. *Considerando a γ^l como una σ acción parcial débilmente propia (Proposición 5.4) se cumple que $\mathbb{E}^{\gamma} = \mathbb{E}^{\gamma^l}$ y, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$, que $\mathbb{E}^{\gamma}(|\xi\rangle\langle\eta|) = |\xi\rangle\rangle\langle\langle\eta|$. Además $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X}) = \mathbb{E}^{\gamma}(\mathbb{F}_c(\mathcal{X})) \subset \mathbb{E}^{\gamma}(\mathbb{K}_c(\mathcal{X})) = \mathcal{F}^l_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$.*

Demostración. La igualdad $\mathbb{E}^{\gamma} = \mathbb{E}^{\gamma^l}$ se deduce inmediatamente de la prueba del Teorema anterior. Allí también mostramos que para todo $\xi, \eta \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ se cumple que $\mathbb{E}^{\gamma}(|\xi\rangle\langle\eta|) = |\xi\rangle\rangle\langle\langle\eta|$. Luego $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X}) = \mathbb{E}^{\gamma}(\mathbb{F}_c(\mathcal{X}))$ y $\mathbb{E}^{\gamma}(\mathbb{K}_c(\mathcal{X})) = \mathbb{E}^{\gamma^l}(\mathbb{F}_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))) = \mathcal{F}^l_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$. $\square$

En el Teorema 5.34 mostramos que existe un unitario $U_\gamma\colon \mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma) \to \mathcal{F}(\mathcal{X})$, donde $\pi\colon C_0(X) \rtimes_\sigma G \to \mathbb{B}(C^*(\mathcal{E}\gamma))$ es el mapa descrito antes del Lema 5.30. Por otra parte el Teorema 2.6 y Corolarios 2.53 y 2.35 nos dicen que $\mathbb{K}(C^*(\mathcal{E}\gamma)) = C^*(\mathcal{B}\gamma^l)$, así que también podemos formar el producto tensorial $\mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{B}\gamma^l)$ y obtener un unitario $U_{\gamma^l}\colon \mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{B}\gamma^l) \to \mathcal{F}(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$.

La «asociatividad del producto tensorial» nos da un único unitario

$$V\colon \mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma) \to \left(\mathcal{F}(X) \otimes_\pi C^*(\mathcal{B}\gamma^l) \right) \otimes C^*(\mathcal{E}\gamma)$$

tal que $V(a \otimes f\xi) = a \otimes f \otimes \xi$, para toda $a \in \mathcal{F}(X)$, $f \in C^*(\mathcal{B}\gamma^l)$ y $\xi \in C^*(\mathcal{E}\gamma)$ (donde $f\xi$ representa la acción de $C^*(\mathcal{B}\gamma^l)$ como operadores compactos de $C^*(\mathcal{E}\gamma)$). Luego existe un único unitario $W\colon \mathcal{F}(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}(\mathbb{K}(\mathcal{X})) \otimes C^*(\mathcal{E}\gamma)$ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X)\otimes_\pi C^*(\mathcal{E}\gamma) \arrow[r, "V"] \arrow[d, "U_\gamma"'] & \Big(\mathcal{F}(X)\otimes_\pi C^*(\mathcal{B}\gamma^l)\Big)\otimes C^*(\mathcal{E}\gamma) \arrow[d, "U_{\gamma^l}\otimes 1"] \\
\mathcal{F}(\mathcal{X}) \arrow[r, "W"'] & \mathcal{F}(\mathbb{K}(\mathcal{X}))\otimes C^*(\mathcal{E}\gamma)
\end{tikzcd}$$

Recordando que $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}^l_c(\mathbb{K}(\mathcal{X}))$ nos preguntamos si $\rho\colon \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X}) \to \mathbb{B}(\mathcal{F}(\mathbb{K}(\mathcal{X}))\otimes C^*(\mathcal{E}\gamma))$, $\rho(T) = WTW^*$, coincide con la restricción a $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$ de

$$\psi\colon \mathcal{F}^l_c(\mathbb{K}(\mathcal{X})) \to \mathbb{B}(\mathcal{F}(\mathbb{K}(\mathcal{X}))\otimes C^*(\mathcal{E}\gamma)),\ \psi(T) = T\otimes 1.$$

Puede sospechares que en general ρ no coincide con la restricción de ψ porque la imagen de ρ está contenida en $\mathbb{K}(\mathcal{F}(\mathbb{K}(\mathcal{X}))\otimes C^*(\mathcal{E}\gamma))$, mientras que parece difícil que los operadores de la forma $T\otimes 1$ sean compactos (generalizados). Tratar de probar la identidad $WTW^* = \psi(T)$ parece extremadamente complicado pues W es la composición de tres unitarios, dos de los cuales son difíciles de calcular en vectores arbitrarios. Por estos motivos no exploraremos la relación entre ρ y ψ y pasaremos a mostrar algunos Teoremas de Imprimitividad, que son los resultados principales de este capítulo.

5.7. Los Teoremas de Imprimitividad

La forma de enunciar los Teoremas de Imprimitividad que enunciamos a continuación es la adoptada en [CMW84, Teorema 2], [Kas88, 3.15] y [Rae88, Corolario 4.2].

Por un lado en [Kas88, 3.15] y [Rae88, Corolario 4.2], en términos de las definiciones presentadas hasta aquí, se consideran dos acciones globales Kasparov propias en lugar de sólo dos acciones globales propias en un espacio HLC (como se hace en [Rie82]). Posteriormente Buss y Echterhoff [BE13, BE14] lograron generalizar esa idea empleando acciones globales débilmente propias.

Por otro lado la idea de [CMW84] es obtener la equivalencia de Morita entre los productos cruzados como una consecuencia de la equivalencia de Morita de ciertas acciones. Los trabajos de F.Abadie y L. Martí [Aba03, AMP09] permiten extender esas construcciones a acciones parciales.

Empezamos con algunos resultados técnicos para luego llegar al resultado más general. Después vendrá una serie de corolarios cuyas demostraciones serán cortas y poco técnicas.

Nuestro Teorema de imprimitividad involucrará una acción parcial en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$, para lo cual necesitamos ideales en ese módulo.

Proposición 5.49. *Supongamos que γ es una $\sigma-$acción parcial débilmente propia con estructura $\phi\colon C_0(X)\to\mathbb{B}(\mathcal{X}_A)$ y que Y es un abierto $\sigma-$invariante de X para el cual existe un ideal $J\subset A$ tal que $\phi(Y)\mathcal{X}=\mathcal{X}J$. Definiendo $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y):=\phi(C_0(Y))\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)$ es un subespacio de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ y $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)*C_c(\mathcal{B}\gamma^r)\subset\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)$.

(2) Todos los conjuntos de la siguiente lista están contenidos en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)$:

$$\begin{aligned}
I &:= \mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle^r & IV &:= \langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y),\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle^l\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\\
II &:= \mathcal{F}_c(\mathcal{X})\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y),\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle^r & V &:= \langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)\rangle^l\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\\
III &:= \mathcal{F}_c(\mathcal{X})\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)\rangle^r & VI &:= \langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X}),\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle^l\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)
\end{aligned}$$

(3) $\mathcal{F}^r_c(\mathcal{X},Y):=\operatorname{span}\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y),\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)\rangle^r$ es un $*-$ideal de $C_c(\mathcal{B}\gamma^r)$ y de $\mathcal{F}^r_c(\mathcal{X})$.

(4) $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},Y):=\operatorname{span}\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y),\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)\rangle^l$ es un $*-$ideal de $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X})$.

(5) Para cada C-norma κ de $L^1(\mathcal{B}\gamma^r)$, la clausura de $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},Y)$ en $\mathcal{F}^l_\kappa(\mathcal{X})$ es fuertemente equivalente Morita a la clausura de $\mathcal{F}^r_c(\mathcal{X},Y)$ en $\mathcal{F}^r_\kappa(\mathcal{X})$ a través del bimódulo obtenido como la clausura de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)$ en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$.*

Demostración. Sean $C_0(X^e)$ la C*-álgebra envolvente de σ y σ^e la acción envolvente. Debido a que pensamos a $C_0(X)$ como un ideal de $C_0(X^e)$ existe una única extensión de ϕ, $\phi^e\colon C_0(X^e)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$. Recordemos que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})=\phi^e(C_c(X^e))\mathcal{X}$. El Teorema de Cohen-Hewitt implica que $\mathcal{Y}:=\phi(C_0(Y))\mathcal{X}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$. Observemos que $\phi^e(C_c(X^e))\mathcal{Y}=\phi^e(C_c(X^e)C_0(Y))\mathcal{Y}=\phi(C_0(Y))\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\subset\mathcal{Y}$. Tomemos $\xi,\eta\in\phi^e(C_c(X^e))\mathcal{Y}$ y $z\in\mathbb{C}$. Sabemos que existen $\xi',\eta'\in\mathcal{Y}$ y $a,b\in C_c(X^e)$ tales que $\xi=\phi^e(a)\xi'$ y $\eta=\phi^e(b)\eta'$. Si $c\in C_c(X^e)$ es constante igual a 1 en la unión de los soportes de a y b entonces $z\xi+\eta\in\mathcal{Y}$ y $\phi^e(c)(z\xi+\eta)=z\xi+\eta$. Lo expuesto anteriormente implica que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)=\phi^e(C_c(X^e))\mathcal{Y}$ es un subespacio de $\mathcal{X}$. Adicionalmente (tomando $z=1$ y $\eta=0$) mostramos que $\phi^e(C_c(X^e))\mathcal{Y}$ coincide con el conjuto de elementos $y\in\mathcal{Y}$ para los que existe $a\in C_c(X^e)$ tal que $\phi^e(a)y=y$.

Más adelante en la prueba nos será extremadamente útil saber que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)$ es cerrado en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ con respecto a la norma de $\mathcal{X}$, cosa que probamos a continuación. Supongamos que $\{y_n\}_n$ es una sucesión[4] contenida en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},Y)$ convergente a $y\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$. Se cumple que $y\in\phi(C_0(Y))\mathcal{X}$ porque $\phi(C_0(Y))\mathcal{X}$ es cerrado en $\mathcal{X}$ y la sucesión está contenida

[4] o una red, es indiferente porque estamos en un espacio métrico.

en ese conjunto. Luego existen $z \in \mathcal{X}$ y $a \in C_0(Y)$ tales que $y = \phi(a)z$. Por otra parte existe $b \in C_c(X^e)$ tal que $\phi^e(b)y = y$, entonces $y = \phi^e(b)y = \phi^e(b)\phi(a)z = \phi(a)\phi^e(b)z \in \phi(C_0(Y))\mathcal{F}_c(\mathcal{X}) = \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$.

Para mostrar la segunda parte de (1) tomemos $a \in C_0(Y)$, $b \in C_c(X^e)$, $x \in \mathcal{X}$ y $f\delta \in C_c(\mathcal{B}\alpha)$, donde $\alpha := \gamma^r$. Debemos mostrar que

$$(\phi(ab)x) * f = \int_G \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\phi(ab)xf(t^{-1})) \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y).$$

Tomemos una sucesión $\{a_n\}_n \subset C_c(Y)$ que converge uniformemente a a. Luego todas las funciones de la forma $t \mapsto \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\phi(a_nb)xf(t^{-1}))$ tienen soporte contenido en $\mathrm{sop}(f)^{-1}$ y convergen uniformemente (con n) a $t \mapsto \Delta(t)^{-1/2}\gamma_t(\phi(ab)xf(t^{-1}))$. Esto implica que $\{(\phi(a_nb)x) * f\}_n$ converge, según la norma de $\mathcal{X}$, a $(\phi(ab)x) * f$. Si logramos mostrar que $(\phi(a_nb)x) * f \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$, entonces lo que vimos en el párrafo anterior junto con el hecho de que $(\phi(ab)x) * f \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ implicará que $(\phi(ab)x) * f \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$. Estos argumentos nos permiten asumir que $a \in C_c(Y)$ sin pérdida de generalidad.

Veremos que $(\phi(ab)x) * f \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$ $(a \in C_c(Y))$ analizando cuidadosamente la demostración de la Observación 5.15. Llamemos $\sigma^e Y$ a la σ^e-órbita de Y, la cual es un conjunto abierto de X^e. Como ab tiene soporte contenido en Y, para cada $t \in G$ la función $\sigma^e_t(a)$ tiene soporte contenido en $\sigma^e Y$. Entonces $C := \cup\{\mathrm{sop}(\sigma^e_t(a)) \colon t \in \mathrm{sop}(f)^{-1}\}$ es un compacto contenido en $\sigma^e Y$. Tomando $c \in C_c(\sigma^e Y)$ constante e igual a 1 en C y operando como lo hicimos a continuación de la Observación 5.15 deducimos que $\phi^e(c^2)[(\phi(ab)x) * f] = (\phi(ab)x) * f$. Por otro lado existen $z \in \mathcal{X}$ y $d \in C_0(X)$ tales que $(\phi(ab)x) * f = \phi(d)z$. Luego $(\phi(ab)x) * f = \phi(c^2d)z = \phi(cd)\phi^e(d)z$. Sabemos que $\phi^e(d)z \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$. Además $cd \in C_c(\sigma^e Y) \cap C_0(X) \subset C_0(\sigma^e Y \cap X) = C_0(\sigma^e Y \cap X)$ porque Y es $\sigma-$invariante; de esto deducimos que $(\phi(ab)x) * f \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$.

La afirmación (2) tiene una demostración más corta de lo que parece. En primer lugar es evidente que (1) implica que $I \subset \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$. Por otro lado la igualdad $\langle x, y\rangle^l z = x\langle y, z\rangle^r$, válida para todo $x, y, z \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$, implica $I = IV$, $II = V$ y $III = VI$.

Pasemos a mostrar que $IV = V$, lo cual implica que los conjuntos I a V son iguales y están contenidos en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$. Observemos que los comentarios del primer párrafo implican que

$$\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y) = \phi(C_c(X^e) \cap C_0(Y))\mathcal{X} = \phi^e(C_c(X^e))\mathcal{X}J = \mathcal{F}_c(\mathcal{X})J.$$

Por otro lado es inmediato que

$$|\mathcal{F}_c(\mathcal{X})J\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})| = |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})JJ^*\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})| = |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})J\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})J| = |\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})J|.$$

De lo anterior y del Corolario 5.48 se deduce

$$IV = \mathbb{E}^{\gamma}(|\mathcal{F}_c(\mathcal{X})J\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})|)(\mathcal{F}_c(\mathcal{X})) = \mathbb{E}^{\gamma}(|\mathcal{F}_c(\mathcal{X})\rangle\langle\mathcal{F}_c(\mathcal{X})J|)(\mathcal{F}_c(\mathcal{X})) = V.$$

Tomemos $x, y, z \in \mathcal{X}$, $a, b, c \in C_c(X^e) \cap C_0(X)$ y $u \in C_0(Y)$. Con la notación del Teorema 5.14

$$\xi := \phi^e(a)x\langle\phi^e(b)y, \phi(cu)z\rangle^r = \int_G \gamma_t \left[\phi^e(a)x\alpha_{t^{-1}}([\phi^e(b)y, \phi(cu)z](t))\right] dt. \tag{5.7.1}$$

Analicemos la función $[\phi^e(b)y, \phi(cu)z]$, la cual de acuerdo a la demostración del Lema 5.12 cumple

$$[\phi^e(b)y, \phi(cu)z](t) = \langle\gamma_t(\phi(\sigma_{t^{-1}}(c^*)b)y), \phi(u)z\rangle = \langle\phi(u^*)\gamma_t(\phi(\sigma_{t^{-1}}(c^*)b)y), z\rangle.$$

Si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $C_0(X)_t \cap C_0(Y)$ entonces

$$\begin{aligned}\alpha_{t^{-1}}([\phi^e(b)y, \phi(cu)z](t)) &= \lim_i \alpha_t(\langle\phi(e_i^2u^*)\gamma_t(\phi(\sigma_{t^{-1}}(c^*)b)y), z\rangle)\\ &= \lim_i \langle\phi(\sigma_{t^{-1}}(e_iu^*c^*)b)y, \gamma_{t^{-1}}(\phi(e_i)z)\rangle \in J;\end{aligned}$$

donde afirmamos que el límite pertenece a J porque $\sigma_{t^{-1}}(e_iu^*c^*) \in C_0(Y)$ ya que Y es $\sigma-$invariante. Tomemos ahora una unidad aproximada de J, $\{f_k\}_k$. De lo que acabamos de mostrar y de la Ecuación 5.7.1 (usando la convergencia uniforme de las funciones que integramos y la topología de $\mathcal{X}$) deducimos que

$$\xi = \int_G \lim_j \gamma_t \left[\phi^e(a)xf_j\alpha_{t^{-1}}([\phi^e(b)y, \phi(cu)z](t))\right] dt = \lim_j \phi^e(a)xf_j\langle\phi^e(b)y, \phi(cu)z\rangle^r.$$

Con esto caracterizamos a $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ como el límite de una red en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$. Como $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$ es cerrado en $\mathcal{F}_c(\mathcal{X})$ deducimos que $\xi \in \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$.

Las afirmaciones (3) y (4) se prueban fácilmente a partir de (1) y (2). En cuanto a (5) llamemos $\mathcal{Z}$ a la clausura de $\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, Y)$ en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$, C a la de $\mathcal{F}_c^l(\mathcal{X}, Y)$ en $\mathcal{F}_\kappa^l(\mathcal{X})$ y D a la de $\mathcal{F}_c^r(\mathcal{X}, Y)$ en $\mathcal{F}_\kappa^r(\mathcal{X})$. En esta situación (2) implica que $\mathcal{Z} = C\mathcal{Z} = \mathcal{Z}D$ y que $\mathcal{Z}$ es un $C - D-$bimódulo de equivalencia de Morita con la estructura heredada de $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X})$. □

En el siguiente enunciado tenemos la dificultad de que el supraíndice r se utiliza para indicar el lado derecho y la norma reducida. Por este motivo notaremos “red” a la norma reducida y usaremos el símbolo | para separar supraíndices, así por ejemplo $\gamma^{\kappa|r}$ equivale a colocar el supraíndice r a la expresión γ^κ. Si hay un solo supraíndice omitiremos |. En el Teorema 2.22 construimos un par de acciones parciales que conmutan, α y β, y con ellas construimos una acción parcial $\widetilde{\beta}$ en el producto cruzado universal de α y otra, $\widetilde{\beta}^r$, en el reducido. Para preservar la notación y facilitar el enunciado $\widetilde{\beta}|^u$ representará $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\beta}|^r$ significará $\widetilde{\beta}^r$. La expresión $\widetilde{\beta}|^r_t$, donde t es un elemento de un grupo, representa la función correspondiente a t de la acción parcial $\widetilde{\beta}|^r$. Hacemos esta aclaración porque t debería estar subordinado a la expresión $\widetilde{\beta}|^r$ y no debería aparecer exactamente debajo de la r.

Teorema 5.50. *Supongamos que:*

- *σ y τ son acciones parciales de G y H en $C_0(X)$, respectivamente.*
- *γ y δ son acciones parciales en módulos de Hilbert de G y H en $\mathcal{X}_A$, respectivamente.*
- *σ es propia y conmuta con τ y, además, γ conmuta con δ.*
- *Existe un $*-$homomorfismo $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ de manera que γ es una $\sigma-$acción parcial con estructura ϕ y δ es una $\tau-$acción parcial con estructura ϕ.*

Además llamemos α a γ^r y β a δ^r, las acciones parciales que definen γ y δ en A.

*En esta situación, si κ es la C^*-norma universal (u) o la reducida (*red*) de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$, entonces existe una única acción parcial en módulos de Hilbert, δ^κ, de G en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$ de forma que:*

- *Para todo $t \in H$ $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_t = \overline{\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}} = \overline{\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)}$, donde las clausuras son tomadas en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$.*
- *Para todo $t \in H$, δ^κ_t coincide con δ_t en $\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))\mathcal{X}$.*

Las acciones α y β conmutan, y si $\widetilde{\beta}|^\kappa$ es la acción parcial de H en $C^*(\mathcal{B}\alpha)$ definida en el Teorema 2.22 entonces para todo $t \in H$ se cumple que

$$\operatorname{span}\langle\langle \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t), \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)\rangle\rangle_\alpha \subset C_c(\mathcal{B}\alpha) \cap (A^H_t \rtimes_{\kappa\alpha} G)$$

y $\delta^\kappa|^r_t(\langle\langle x,y\rangle\rangle_\alpha) = \langle\langle \delta_t(x),\delta_t(y)\rangle\rangle_\alpha = \widetilde{\beta}|^\kappa_t(\langle\langle x,y\rangle\rangle_\alpha)$, para todo $x,y \in \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_{t^{-1}})$.

En caso que σ sea libre $\delta^\kappa|^r = \widetilde{\beta}|^\kappa$.

Demostración. La Proposición 2.21 implica que α conmuta con β. Probemos ahora que $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma) \cap \mathcal{X}^H_t = \mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)$, pues esto nos será útil a través de la prueba. Observemos que $\phi(C_0(X^H_t))\mathcal{X} = \mathcal{X}^H_t = \mathcal{X}A^H_t$ y por definición X^H_t es $\sigma-$invariante, por lo que tiene sentido considerar $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)$ (como en la Proposición anterior, excepto que agregamos γ a la notación para recordar cuál es la acción débilmente propia).

Llamemos σ^e a la envolvente de σ, X^e al espacio envolvente de X (con respecto a σ) y $\phi^e\colon C_0(X^e)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$ a la extensión de ϕ. Si $x\in\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma)\cap\mathcal{X}^H_t$ entonces existen $a\in C_c(X^e)$, $b\in C_0(X^H_t)$ e $y\in\mathcal{X}$ tales que $\phi^e(a)x=x=\phi(b)y$. Luego $x=\phi^e(a)x=\phi^e(a)\phi(b)y=\phi(b)\phi^e(b)y\in\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)$. Recíprocamente es evidente que $\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)=\phi(C_0(X^H_t))\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma)\subset\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma)\cap\mathcal{X}^H_t$, porque ϕ es fuertemente no degenerado.

Probemos ahora que, para todo $t\in H$, se tiene $\overline{\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}}=\overline{\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)}$. Recordemos que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)=\phi(C_c(X^e)\cap C_0(X))\mathcal{X}$ con lo cual

$$\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)=\phi(C_c(X^H_t)[C_c(X^e)\cap C_0(X)])\mathcal{X}=\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}.$$

Entonces $\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}\subset\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)$ y $\overline{\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}}\subset\overline{\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)}$. Para mostrar la otra inclusión basta con ver que $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)\subset\overline{\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}}$. Dado $x\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)$ tomemos una red $\{a_i\}_i\subset C_c(X^H_t)$ de forma que $\{\phi(a_i)x\}_i$ converge a x en $\mathcal{X}$. Por otro lado tomemos $b\in C_c(X^e)$ tal que $\phi^e(b)x=x$. El Lema 5.18 implica que $\{\langle\langle\phi(a_ib)x-x,\phi(a_ib)x-x\rangle\rangle_\alpha\}_i$ converge a 0 en la topología del límite inductivo y por lo tanto con respecto a κ. Evidentemente esto implica que $\{\phi(a_i)x\}_i$ converge a x en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$, con lo cual $x\in\overline{\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}}$.

Para mostrar que cada $F:=\{\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_t\}_{t\in H}$ es una familia de ideales de $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$ basta utilizar la afirmación (2) de la Proposición anterior junto con el hecho de que, en general, $\mathcal{Y}$ es un ideal del módulo de Hilbert $\mathcal{Z}$ si y solamente si es un subespacio cerrado y $\mathcal{Z}\langle\mathcal{Y},\mathcal{Z}\rangle\subset\mathcal{Y}$.

Construyamos una familia de secciones S como en Corolario 1.27 para mostrar que F es una familia continua. Dada $f\in C^\tau_0(H,C_0(X))$ y $x\in\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)$ definamos $[f,x]\colon H\to\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$ como $[f,x](t)=\phi(f(t))x$. Sea S el conjunto formado por todas funciones de la forma $[f,x]$. Es evidente que para todo $t\in G$ $\{u(t)\colon t\in H\}\subset\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_t$. Además, dado que $\{g(t)\colon g\in C^\tau_0(H,C_0(X))\}=C_0(X^H_t)$, es inmediato que $\{u(t)\colon u\in S\}=\phi(C_0(X^H_t))\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)$ es denso en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_t$. Tomemos $[f,x]\in S$. El Teorema de Cohen-Hewitt implica que existen $a\in C_c(X^e)\cap C_0(X)$ e $y\in\mathcal{X}$ tales que $x=\phi(a)y$. Luego el Lema 5.18 implica que para todo $t\in H$ y toda red $\{t_i\}_i\subset H$ convergente a $t\in H$, la red $\{\langle\langle[f,x](t_i)-[f,x](t),[f,x](t_i)-[f,x](t)\rangle\rangle_\alpha\}_i$ converge a 0 en el límite inductivo. Esto último implica que $[f,x]$ es continua como función de H en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$.

Es momento de construir δ^κ. Dado $t\in H$ como ϕ es fuertemente no degenerada

$$\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}=\phi(C_c(X^H_t)\cap C_c(X^e))\mathcal{X}=\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}=\phi(C_c(X^H_t))\mathcal{X}_t.$$

Luego $\delta_t(\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))\mathcal{X}_{t^{-1}}) = \phi(\tau_t(C_c(X^H_{t^{-1}})))\delta_t(\mathcal{X}_{t^{-1}}) = \phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))\mathcal{X}$. Para extender δ_t a $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$ mostremos que δ_t es una isometría en $\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))\mathcal{X}$ con respecto a la métrica de $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$. Tomemos $x, y \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ y $a, b \in \phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))$. Luego, para todo $s \in G$:

$$\begin{aligned}\langle\langle\delta_t(\phi(a)x),\delta_t(\phi(b)y)\rangle\rangle_\alpha(s) &= \Delta(s)^{-1/2}\alpha_s([\phi(\tau_t(a))\delta_t(x),\phi(\tau_t(b))\delta_t(y)](s^{-1}))\delta_s\\ &= \Delta(s)^{-1/2}\alpha_s(\langle\gamma_{s^{-1}}(\phi(\sigma^e_s(\tau_t(b)^*)\tau_t(a))\delta_t(x)),\delta_t(y)\rangle)\delta_s.\end{aligned}$$

Factorizando a x como $x = \phi(c)x'$, con $c \in C_0(X^H_{t^{-1}})$ y $x' \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$, y hacemos lo mismo con y deducimos que si $\{e_i\}_i$ es una unidad aproximada de $C_0(X^H_{t^{-1}} \cap X^G_s)$ entonces $\Delta(s)^{1/2}\langle\langle\delta_t(\phi(a)x),\delta_t(\phi(b)y)\rangle\rangle_\alpha(s)$ es igual a

$$\begin{aligned}&\lim_i \alpha_s(\langle\gamma_{s^{-1}}(\phi(\sigma^e_s(\tau_t(b)^*)\tau_t(ae_i))\delta_t(x)),\delta_t(\phi(e_i)y)\rangle)\delta_s\\
&= \lim_i \alpha_s(\langle\gamma_{s^{-1}}(\phi(\sigma^e_s(\tau_t(b)^*)\tau_t(ae_i))\delta_t(x)),\delta_t(\phi(e_i)y)\rangle)\delta_s\\
&= \lim_i \langle\phi[\sigma_s(\tau_t(b)^*\sigma_{s^{-1}}(\tau_t(ae_i))]\delta_t(x),\gamma_s(\delta_t(\phi(e_i)y))\rangle\delta_s\\
&= \lim_i \langle\delta_t\left(\phi\left[\tau_{t^{-1}}\left\{\sigma_s(\tau_t(b)^*\sigma_{s^{-1}}(\tau_t(ae_i))\right\}\right]x\right),\delta_t(\gamma_s(\phi(e_i)y))\rangle\delta_s\\
&= \lim_i \beta_t(\langle\phi\left[\tau_{t^{-1}}\left\{\sigma_s(\tau_t(b)^*\sigma_{s^{-1}}(\tau_t(ae_i))\right\}\right]x,\gamma_s(\phi(e_i)y)\rangle)\delta_s\\
&= \lim_i \beta_t(\langle\phi\left[\sigma_s(b^*\sigma_{s^{-1}}(ae_i))\right]x,\gamma_s(\phi(e_i)y)\rangle)\delta_s\\
&= \lim_i \beta_t(\langle\phi\left[\sigma^e_s(b^*)ae_i\right]x,\gamma_s(\phi(e_i)y)\rangle)\delta_s\\
&= \lim_i \beta_t(\alpha_s(\langle\gamma_{s^{-1}}(\phi\left[\sigma^e_s(b^*)ae_i\right]x),\phi(e_i)y\rangle))\delta_s\\
&= \beta_t(\alpha_s(\langle\gamma_{s^{-1}}(\phi\left[\sigma^e_s(b^*)a\right]x),y\rangle))\delta_s\\
&= \beta_t(\alpha_s([\phi(a)x,\phi(b)y](s^{-1})))\delta_s\\
&= \Delta(s)^{1/2}\widetilde{\beta}|^\kappa_t(\langle\langle\phi(a)x,\phi(b)y\rangle\rangle_\alpha)(s).\end{aligned}$$

El solo hecho de que aparezca β_t en las igualdades anteriores implica que

$$\operatorname{span}\langle\langle\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t),\mathcal{F}^l_c(\mathcal{X},\gamma,X^H_t)\rangle\rangle_\alpha \subset C_c(\mathcal{B}\alpha)\cap(A^H_t \rtimes_{\kappa\alpha} G),$$

luego podemos concluir que

$$\langle\langle\delta_t(\phi(a)x),\delta_t(\phi(b)y)\rangle\rangle_\alpha = \widetilde{\beta}|^\kappa_t(\langle\langle\phi(a)x,\phi(b)y\rangle\rangle_\alpha), \tag{5.7.2}$$

lo cual implica que δ_t es una $\|\ \|_\kappa$ isometría en $\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))\mathcal{X}$, y por lo tanto tiene una única extensión a $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)$, la cual llamamos δ^κ_t.

Para mostrar que δ^κ_t es un homomorfismo de módulos de Hilbert bastará con mostrar que $\delta_t(u) * \langle\langle\delta_t(v),\delta_t(v)\rangle\rangle_\alpha$, para todos $u, v, w \in \phi(C_c(X^H_{t^{-1}}))\mathcal{X}$. Después de los cálculos que hicimos gran parte del trabajo se ve simplificado. A partir de esos cálculos de que γ y δ conmutan deducimos

$$\begin{aligned}\delta_t(u) * \langle\langle \delta_t(v), \delta_t(w)\rangle\rangle_\alpha &= \int_G \Delta(s)^{1/2}\gamma_s\left(\delta_t(u)\beta_t(\alpha_{s^{-1}}([v,w](s)))\right) ds \\ &= \int_G \Delta(s)^{1/2}\gamma_s\left(\delta_t(u\alpha_{s^{-1}}([v,w](s)))\right) ds \\ &= \int_G \delta_t\left(\Delta(s)^{1/2}\gamma_s\left(u\alpha_{s^{-1}}([v,w](s))\right)\right) ds \\ &= \delta_t\left(u * \langle\langle v, w\rangle\rangle_\alpha\right).\end{aligned}$$

Aún no hemos probado que $\delta^\kappa := (\{\delta^\kappa_t\}_{t\in H}, \{\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_t\}_{t\in H})$ es una acción parcial en conjuntos. Lo único no inmediato de este punto es mostrar que dados $s,t\in H$ y $x \in \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}} \cap \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}s^{-1}}$ se cumple que $\delta^\kappa_t(x)\in \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{s^{-1}}$ y que $\delta^\kappa_{st}(x) = \delta^\kappa_s(\delta^\kappa_t(x))$.

Puesto que $\{\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_t\}_{t\in H}$ es una familia continua de ideales el conjunto

$$U := \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, X^H_{t^{-1}})\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, X^H_{t^{-1}s^{-1}}), \mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)\rangle^l$$

genera un subespacio denso en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}}\cap \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}s^{-1}}$. La Proposición implica que $U\subset \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, X^H_{t^{-1}})\cap \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, X^H_{t^{-1}s^{-1}})$. La misma Proposición combinada con las técnicas que hemos desarrollado hasta este punto en esta prueba implican que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(\mathcal{X}, X^H_{t^{-1}})\cap \mathcal{F}_c(\mathcal{X}, X^H_{t^{-1}s^{-1}}) &= \mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)\cap \mathcal{X}^H_{t^{-1}}\cap \mathcal{X}^H_{t^{-1}s^{-1}} \\ &= \mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma)\cap \phi(C_0(X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}}))\mathcal{X} \\ &= \mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma, X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}}) \\ &= \overline{\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}}))\mathcal{X}}.\end{aligned}$$

En definitiva $\mathcal{F}_c(\mathcal{X},\gamma, X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}})$ es denso en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}}\cap \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}s^{-1}}$. Apelando al mismo tipo de razonamientos expuestos más arriba obtenemos que

$$\overline{\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}}))\mathcal{X}} = \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}}\cap \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{t^{-1}s^{-1}}.$$

Luego existe una sucesión $\{x_n\}_n$ contenida en $\phi(C_c(X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}}))\mathcal{X}$ que converge a x según $\|\ \|_\kappa$. Además $\tau_t(C_c(X^H_{t^{-1}}\cap X^H_{t^{-1}s^{-1}})) = C_c(X^H_t\cap X^H_{s^{-1}})$, por lo que $\{\delta^\kappa_t(x_n)\}_n$ está contenida en $\phi(C_c(X^H_t\cap X^H_{s^{-1}}))\mathcal{X}\subset \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{s^{-1}}$ y converge a $\delta^\kappa_t(x)$. Entonces $\delta^\kappa_t(x)\in \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)_{s^{-1}}$. Además, tomando los siguientes límites con respecto a $\|\ \|_\kappa$ se cumple que $\delta^\kappa_s(\delta^\kappa_t(x)) = \text{lím}_n\, \delta_s(\delta_t(x_n)) = \text{lím}_n\, \delta_{st}(x_n) = \delta^\kappa_{st}(x)$.

Mostremos que δ^κ es continua utilizando elementos del conjunto S construido más arriba, junto con el Teorema 1.45. Tomemos $t\in H$, $a\in C_c(X^H_{t^{-1}})$ y $x\in\mathcal{X}$. Sea $D := \{(s,p)\in$

$H \times X : p \in X^H_s\}$, el cual es un abierto de $H \times X$. El conjunto $C := \{t^{-1}\} \times \mathrm{sop}(a)$ es compacto y está contenido en D y $C \to \mathbb{C},\ (t^{-1}, p) \mapsto a(p)$, es continua; luego el Teorema de extensión de Tietze implica que existe $f \in C_c(D)$ tal que $f(t^{-1}, p) = a(p)$.

Sea $\iota \colon C_c(D) \to C_0^\tau(H, C_0(X))$ definida como $\iota(g)(s)(p) = g(s, p)$, función que es una isometría lineal. Es inmediato que $\iota(f)(t^{-1}) = a$ y que $[\iota(f), x](t^{-1}) = \phi(a)x$. Entonces definiendo $S_0 := \{[\iota(f), x] \colon f \in C_c(D), x \in \mathcal{X}\}$ se tiene $S_0 \subset S$, y para todo $r \in H$ $\{u(r) \colon u \in S_0\}$ es denso en $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X}, \gamma)$. En este punto el Teorema 1.45 nos dice que para mostrar que δ^κ es una acción parcial continua nos bastará con mostrar que $t \mapsto \delta_t(u(t^{-1}))$ es continua con respecto a $\| \ \|_\kappa$, para toda $u \in S_0$.

Fijemos $f \in C_c(D)$ y $x \in \mathcal{X}$. Tomemos $f_1, f_2 \in C_c(D)$ tales que $f = f_1 f_2$. La función $\rho \colon D \to D,\ \rho(s, p) = (s^{-1}, \tau_{s^{-1}}(p))$ es un homeomorfismo, y para todo $s \in H$ se tiene que $\tau_s(\iota(f_1)(s^{-1})) = \iota(f_1 \circ \rho)(s)$. Pensando a D como subconjunto de $H \times X^e$, proyectando el soporte de $f_1 \circ \rho$ en X^e y usando el Lema de Uryshon conseguimos una función $b \in C_c(X^e)$ tal que $b\iota(f_1 \circ \rho)(s) = \iota(f_1 \circ \rho)(s)$, para todo $s \in H$. Luego para todo $s \in H$:

$$\begin{aligned}
\phi^e(b)\delta_s([\iota(f), x](s^{-1})) &= \phi^e(b)\delta_s(\phi(\iota(f_1)(s^{-1})\iota(f_2)(s^{-1}))x) \\
&= \phi(b\tau_s(\iota(f_1)(s^{-1})))\delta_s(\phi(\iota(f_2)(s^{-1}))x) \\
&= \phi(b\iota(f_1 \circ \rho)(s))\delta_s(\phi(\iota(f_2)(s^{-1}))x) \\
&= \phi(\iota(f_1 \circ \rho)(s))\delta_s(\phi(\iota(f_2)(s^{-1}))x) \\
&= \delta_s([\iota(f), x](s^{-1})).
\end{aligned}$$

Dada una red $\{t_i\}_i \subset G$ el Lema 5.18 implica que la red

$$\{\langle\langle \delta_{t_i}([\iota(f), x](t_i^{-1})) - \delta_t([\iota(f), x](t^{-1})), \delta_{t_i}([\iota(f), x](t_i^{-1})) - \delta_t([\iota(f), x](t^{-1})) \rangle\rangle_\alpha\}_i$$

converge a 0 en el límite inductivo, pues es igual a la red de la forma

$$\{\langle\langle u(t_i) - u(t), u(t_i) - u(t) \rangle\rangle_\alpha\}_i \text{ con } u(r) = \phi(b\iota(f_1 \circ \rho)(r))\delta_r(\phi(\iota(f_2)(r^{-1}))x).$$

Todo esto implica que $t \mapsto \delta^\kappa_t([\iota(f), x](t^{-1}))$ es continua con respecto a $\| \ \|_\kappa$.

Ya en la fase final de la prueba supongamos que σ es libre. Esto implica que $\mathcal{F}^r_\kappa(\mathcal{X}, \gamma) = C^*_\kappa(\mathcal{B}\alpha) = A \rtimes_{\kappa,\alpha} G$. Mostremos que para cada $t \in H$ se cumple que

$$\overline{\mathrm{span}}\, \langle\langle \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X}, \gamma), \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X}, \gamma) \rangle\rangle_\alpha = A^H_t \rtimes_{\kappa,\alpha} G. \tag{5.7.3}$$

Pensemos al fibrado $\mathcal{B}\alpha|_{A^H_t}$ como un ideal de $\mathcal{B}\alpha$. Por otro lado la restricción $\gamma|_{\mathcal{X}^H_t}$ es una $\sigma|_{X^H_t}$−acción parcial débilmente propia con estructura $\phi|_{C_0(X^H_t)} \colon C_0(X^H_t) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}^H_t)$.

Además $\sigma|_{X_t^H}$ es libre por ser la restricción de una acción parcial libre. Como envolvente de $\sigma|_{X_t^H}$ utilizaremos la restricción de σ^e a la σ^e-órbita de X_t^H. Usando esa envolvente se deduce fácilmente que $\langle\langle x,y\rangle\rangle_{\alpha|_{A_t^H}} = \langle\langle x,y\rangle\rangle_\alpha$, para todo $x,y\in\phi(C_c(X_t^H))\mathcal{X}$. Como $\sigma|_{X_t^H}$ es libre

$$\overline{\operatorname{span}}\,\langle\langle\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma),\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{X},\gamma)\rangle\rangle_{\alpha|_{A_t^H}} = A_t^H \rtimes_{\kappa,\alpha} G,$$

lo que implica la igualdad 5.7.3. Finalmente la Ecuación 5.7.2 termina de mostrar que $\delta^\kappa|^r = \widetilde{\beta}|^\kappa$. □

Naturalmente el teorema anterior nos da una equivalencia de Morita entre $\delta^\kappa|^l$ y $\widetilde{\beta}|^\kappa$, si σ es libre. Ese hecho puede combinarse con los resultados del Capítulo 2 referentes a equivalencia de Morita de acciones parciales para tratar, por ejemplo, cuestiones de acciones parciales promediables.

Corolario 5.51. *Si además de las hipótesis del teorema anterior se tiene que σ es libre y κ es la norma universal o la reducida de $L^1(\mathcal{B}\alpha)$, entonces $\mathcal{F}^l_\kappa(\mathcal{X},\gamma)\rtimes_{\kappa,\delta^\kappa|^l} H$ es Morita equivalente a $(A\rtimes_{\kappa,\alpha} G)\rtimes_{\kappa,\widetilde{\beta}|^\kappa} H$.*

Demostración. Del Teorema anterior deducimos que $\delta^\kappa|^l$ es equivalente Morita a $\widetilde{\beta}|^\kappa$. Luego la equivalencia se deduce del Corolario 2.62. □

El Teorema donde construimos δ^κ es asimétrico en el sentido de que las hipótesis sobre las acciones de G no son las mismas que las de las acciones de H.

Teorema 5.52. *Supongamos que:*

- *σ y τ son acciones parciales de G y H en $C_0(X)$, respectivamente.*
- *γ y δ son acciones parciales en módulos de Hilbert de G y H en $\mathcal{X}_A$, respectivamente.*
- *σ y τ son propias, libres y conmutan. Además γ conmuta con δ.*
- *Existe un $*-$homomorfismo $\phi\colon C_0(X)\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$ de manera que γ es una $\sigma-$acción parcial con estructura ϕ y δ es una $\tau-$acción parcial con estructura ϕ.*

Además llamemos α a γ^r y β a δ^r, las acciones parciales que definen γ y δ en A. Si κ es la norma reducida o la universal entonces se tienen las siguientes equivalencias de Morita, que simbolizamos con $\sim$:

$$\mathcal{F}^l_\kappa(\mathcal{X},\gamma)\rtimes_{\kappa,\delta^\kappa|^l}\rtimes H \sim (A\rtimes_{\kappa,\alpha} G)\rtimes_{\kappa,\widetilde{\beta}^\kappa} H \sim A\rtimes_{\kappa,\alpha\times\beta}(G\times H)$$
$$\mathcal{F}^l_\kappa(\mathcal{X},\delta)\rtimes_{\kappa,\gamma^\kappa|^l}\rtimes G \sim (A\rtimes_{\kappa,\beta} H)\rtimes_{\kappa,\widetilde{\alpha}^\kappa} G \sim A\rtimes_{\kappa,\beta\times\alpha}(H\times G)$$
$$A\rtimes_{\kappa,\alpha\times\beta}(G\times H)\sim A\rtimes_{\kappa,\beta\times\alpha}(H\times G)$$

En caso que α y β sean promediables (por ejemplo si ϕ es central) entonces $\gamma^u|^l$ es promediable si y solamente si $\delta^u|^l$ lo es.

Demostración. Las equivalencias de Morita se deducen del Teorema anterior y del Teorema 2.23. Este último Teorema implica que en caso que α y β sean promediables entonces $\widetilde{\alpha}$ es $r-$isomorfa a $\widetilde{\beta}$. Luego $\widetilde{\alpha}$ es promediable si y solamente si $\widetilde{\beta}$ lo es. Para terminar la prueba basta usar el Teorema anterior recordando que la propiedad de ser promediable se preserva por la equivalencia de Morita de acciones parciales. $\square$

Apéndice A

Fibrados de Banach

Nuestra principal referencia sobre teoría de fibrados de Banach es [FD88], donde tomamos la definición. Enunciamos aquí algunos resultados de los cuales, o bien no hemos encontrado una referencia directa, o bien es conveniente que formen parte del texto pues serán utilizados en varias ocasiones.

A.1. Continuidad

Sea $\mathcal{B}$ un fibrado de Banach sobre un espacio HLC X, la proyección de $\mathcal{B}$ en X será denotada π y $\mathcal{B}_x := \pi^{-1}(x)$ $(x \in X)$. Una sección de $\mathcal{B}$ es una función $f\colon X \to B$ tal que $\pi \circ f = \mathrm{id}_X$. El soporte de f es la clausura de $\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$ y decimos que f tiene soporte compacto si $\operatorname{sop}(f)$ es compacto en X. El conjunto formado por todas las secciones continuas de $\mathcal{B}$ se denota $C(\mathcal{B})$ y $C_c(\mathcal{B}) := \{f \in C(\mathcal{B})\colon \operatorname{sop}(f) \text{ es compacto}\}$.

En varias ocasiones nos será útil la siguiente consecuencia de [FD88, II 13.16].

Proposición A.1. *Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fibrados de Banach sobre los espacios HLC X e Y, respectivamente, y que $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función tal que:*

1. *Existe una función continua $f\colon X \to Y$ de forma que para todo $x \in X$ se cumple que $\Phi(\mathcal{A}_x) \subset \mathcal{B}_{f(x)}$ y que $\Phi|_{\mathcal{A}_x}\colon \mathcal{A}_x \to \mathcal{B}_{f(x)}$ es lineal.*
2. *Existe una constante $k \geq 0$ tal que $\|\Phi(a)\| \leq k\|a\|$, para todo $a \in \mathcal{A}$.*
3. *Existe un conjunto $\Gamma \subset C(\mathcal{A})$ tal que para todo $x \in X$, $\{u(x)\colon u \in \Gamma\}$ es denso en $\mathcal{A}_x$ y para todo $u \in \Gamma$ se tiene $\Phi \circ u\colon X \to \mathcal{B}$ es continua.*

Luego Φ es continua. En particular, si f es un homeomorfismo y en lugar de la continuidad de $\Phi \circ u$ se requiere que $\Phi \circ u \circ f^{-1} \in C(\mathcal{B})$ (para toda $u \in \Gamma$) entonces Φ es continua.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la retracción (*retraction* en [FD88]) de $\mathcal{B}$ por $f\colon X \to Y$, el cual es un fibrado de Banach sobre X. Específicamente $\mathcal{C} = \{(x,b) \in X \times \mathcal{B}\colon f(x) = \pi_{\mathcal{B}}(b)\}$, donde $\pi_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to Y$ es la proyección de $\mathcal{B}$ y la topología de $\mathcal{C}$ es la relativa a $X \times \mathcal{B}$. La proyección de $\mathcal{C}$ sobre X es $(x,b) \mapsto x$ y la fibra $\mathcal{C}_x$ se identifica isométricamente como espacio de Banach con $\mathcal{B}_{f(x)}$.

Definamos $\Psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ como $\Psi(a) = (\pi_{\mathcal{A}}(a), \Phi(a))$. Observemos que $\Psi(\mathcal{A}_x) \subset \mathcal{C}_x$ y que $\Psi|_{\mathcal{A}_x}$ es lineal, para todo $x \in X$. Por otro lado, con k como en (2), se cumple que $\|\Psi(a)\| = \|\Phi(a)\| \leq k\|a\|$. Además para todo $u \in \Gamma$ se tiene que $\Psi \circ u$ coincide con $x \mapsto (x, \Phi(u(x)))$, que es una sección de $\mathcal{C}$ y es continua por (3). Luego [FD88, II 13.16] implica que Ψ es continua. Para terminar observemos que $\kappa\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, $(x,b) \mapsto b$, es continua y $\kappa \circ \Psi = \Phi$, lo que implica la continuidad de Φ. $\square$

A.2. Subfibrados

Un *subfibrado* del fibrado de Banach $\mathcal{B}$ sobre X es un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de forma que: (a) para todo $x \in X$ $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_x$ es un subespacio (no vacío) de $\mathcal{B}_x$ y (b) $\mathcal{A}$ con la topología relativa a $\mathcal{B}$ es un fibrado de Banach (sobre X).

La definición dada en [FD88] de subfibrado es ligeramente diferente de la anterior. Se requiere la condición (a) y en lugar de (b) la existencia de una subespacio $S \subset C(\mathcal{B})$ de forma que $C(X)S \subset S$ y que todo $x \in X$ $\{f(x)\colon f \in S\}$ sea denso en $\mathcal{A}_x$. Ambas definiciones son equivalentes por el Teorema de Douady y dal Soglio-Herault [FD88, C].

A.3. Topología del límite inductivo

Volvamos a tomar un fibrado de Banach $\mathcal{B}$ con la notación de arriba. Dada $f \in C(\mathcal{B})$ se define $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|\colon x \in X\} \in [0, +\infty]$ y se dice que f está acotada si $\|f\|_\infty < \infty$. El conjunto formado por todas las secciones continuas y acotadas se denota $C_b(\mathcal{B})$, el cual es un espacio de Banach con la suma y producto por escalares punto a punto y $\| \ \|_\infty$ como norma, a la que llamamos norma del supremo.

Se dice que $f \in C(\mathcal{B})$ se anula en infinito si $\forall\ \varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X\colon \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto. El conjunto formado por todas las secciones continuas que se anulan en infinito se denota $C_0(\mathcal{B})$. Se cumple que $C_c(\mathcal{B}) \subset C_0(\mathcal{B}) \subset C_b(\mathcal{B})$ y tanto $C_c(\mathcal{B})$ como $C_0(\mathcal{B})$ son subespacios de $C_b(\mathcal{B})$. Además $C_c(\mathcal{B})$ es $\| \ \|_\infty -$denso en $C_0(\mathcal{B})$.

Dado un compacto $K \subset X$ definimos $C_K(\mathcal{B}) := \{f \in C_c(\mathcal{B}) \colon \operatorname{sop}(f) \subset K\}$, el cual es un subespacio cerrado de $C_b(\mathcal{B})$ y por lo tanto un espacio de Banach. La inclusión canónica de $C_K(\mathcal{B})$ en $C_c(\mathcal{B})$ se denota ι_K. A continuación recordamos tres resultados que se encuentran en [FD88, II 14].

Teorema A.2. *Existe una única topología localmente convexa de $C_c(\mathcal{B})$ que contiene a cualquier otra topología localmente convexa de $C_c(\mathcal{B})$ con la cual ι_K es continua, para todo compacto $K \subset X$ (considerando en $C_K(\mathcal{B})$ la topología de la norma del supremo).*

La topología antes mencionada, que llamaremos del límite inductivo y denotaremos i. l. t., *tiene la siguiente propiedad universal: para todo espacio localmente convexo y toda función lineal $T \colon C_c(\mathcal{B}) \to M$ se cumple que T es $\tau-$continua si y solamente si $T \circ \iota_K$ es continua, para todo compacto $K \subset X$.*

Observación A.3. Si $f \in C_c(\mathcal{B})$ y $\{f_i\}_i \subset C_c(\mathcal{B})$ es una red para la cual existe un compacto $K \subset X$ de forma que $\lim_i \|f_i - f\|_\infty = 0$, entonces $\{f\}_i$ converge a f en la topología del límite inductivo.

Teorema A.4. *Si $S \subset C_c(\mathcal{B})$ y para toda $f \in C_c(\mathcal{B})$ existe un compacto $K \subset X$ de forma que $f \in \overline{S \cap C_K(\mathcal{B})}^{\| \ \|_\infty}$, entonces S es denso en la topología del límite inductivo.*

En [FD88, II 14] también se muestra que la restricción de i. l. t. a $C_K(\mathcal{B})$ es la topología definida por $\| \ \|_\infty$ y que τ contiene a las siguientes topologías: de convergencia uniforme, de convergencia uniforme en compactos y de convergencia en un compacto dado.

Como caso particular de lo anterior tenemos los fibrados triviales, los cuales son de la forma $X \times E \to X, (x,a) \mapsto x$, para algún espacio de Banach E y un espacio HLC X. Llamemos $\mathcal{B}(X,E)$ a ese fibrado trivial. En esta situación se identifica $C(\mathcal{B}(X,E))$ con las funciones continuas de X en E, $C(X,E)$, a través del isomorfismo lineal $T \colon C(X,E) \to C(\mathcal{B}(X,E))$, $T(f)(x) = (f(x),x)$. La topología del límite inductivo en $C_c(X,E) := T^{-1}(C_c(\mathcal{B}(X,E)))$ es la única con la cual T es un homeomorfismo, considerando en $C(\mathcal{B}(X,E))$ la topología del límite inductivo. En caso que $E = \mathbb{C}$ omitimos toda referencia a E. Por ejemplo $C_c(X) = C_c(X,\mathbb{C})$ y $C(X) = C(X,\mathbb{C})$.

Lema A.5 ([Aba03] Lema 5.1)**.** *Sea $\mathcal{B}$ un fibrado de Banach sobre un espacio HLC X. Supongamos que $\Theta \subset C_c(X)$ es denso en la topología del límite inductivo y que $F \subset C_c(\mathcal{B})$ es un subespacio vectorial de manera que $\Theta F \subset F$. Luego, definiendo $F(x) := \{f(x) \colon f \in F\}$ para todo $x \in X$, se cumple que la clausura de F en la topología del límite inductivo es $\{g \in C_c(\mathcal{B}) \colon g(x) \in \overline{F(x)} \ \forall \ x \in X\}$. En particular: si $\overline{F(x)} = \mathcal{B}_x$ para todo $x \in X$, entonces F es denso en $C_c(\mathcal{B})$.*

A.4. Continuidad e integración

Frecuentemente uno quiere definir funciones puntualmente a partir de integrales y luego mostrar que la función obtenida es continua. Afortunadamente esta situación está resuelta de manera bastante general en [FD88, II 15.19]. A continuación exponemos una leve modificación de aquella situación.

Fijemos un fibrado de Banach $\mathcal{B}$ sobre el espacio Hausdorff localmente compacto (HLC) X y tomemos un espacio topológico Y (no tiene por qué ser Hausdorff o localmente compacto). Dada una función $f\colon X \times Y \to \mathcal{B}$ diremos que

- f es una $Y-$sección si para cada $(x, y) \in X \times Y$ se cumple que $f(x, y) \in \mathcal{B}_x$.
- f tiene soporte $Y-$globalmente acotado si existe un compacto $K \subset X$ de manera que $f(x, y) = 0$ si $x \notin K$.
- f tiene soporte $Y-$localmente acotado si para cada $y \in Y$ existen un entorno U de y y un compacto $K \subset X$ de manera que $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in (X - K) \times U$.

Lema A.6. *Supongamos que $\mathcal{B}$, X e Y son como arriba, Z es un espacio HLC y μ una medida regular de Borel en Z.*

1. *Si $f\colon X\times Y \to \mathcal{B}$ es una $Y-$sección continua y tiene soporte $Y-$localmente acotado entonces la función $F\colon Y \to C_c(\mathcal{B})$, $F(y)(x) = f(x, y)$, es continua en la topología del límite inductivo.*
2. *Si $g\colon X \times Y \times Z \to \mathcal{B}$ es una $Y \times Z-$sección continua que tiene soporte $Y \times Z-$localmente acotados y también cumple que*
   (a) dado $y_0 \in Y$ existen un entorno U de Y y un compacto $K \subset X$ de forma que $g(x, y, z) = 0$ si $(x, y, z) \in (X - K) \times U \times Z$;
   (b) dado $(x_0, y_0) \in X \times Y$ existe un entorno U de (x_0, y_0) y un compacto $L \subset Z$ de forma que $g(x, y, z) = 0$ si $(x, y, z) \in U \times (Z - L)$.

   entonces la función $f\colon X\times Y \to \mathcal{B}$, $f(x, y) = \int_Z g(x, y, z)\, d\mu(z)$, es una $Y-$sección continua con soporte $Y-$localmente acotado. En consecuencia existe una única función continua en la topología del límite inductivo $G\colon Y \to C_c(\mathcal{B})$ que satisface que $G(y)(x) = \int_Z g(x, y, z)\, d\mu(z)$.

Demostración. Veamos que F es continua en $y_0 \in Y$. Tomemos un entorno U de y_0 y un compacto $K \subset X$ de manera que $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in (X - K) \times U$. Eso implica que si $y \in U$ entonces $F(y) \in C_K(\mathcal{B})$. Luego basta mostrar que F es continua con la norma del supremo.

Tomemos una red $\{y_i\}_i$ que converge a y_0, sin pérdida de generalidad posemos asumir que la red está contenida en U. Supongamos, por absurdo, que $\{\|F(y_i) - F(y_0)\|_\infty\}_i$ no converge a 0. Luego existe un $\varepsilon > 0$ de manera que para todo i es posible encontrar $i' \geq i$ de forma que $\|F(y_{i'}) - F(y_0)\|_\infty \geq \varepsilon$. En esta situación es posible encontrar una subred $\{i_j\}_j$ de forma que $\{y_{i_j}\}_j \subset U$ y $\|F(y_{i_j}) - F(y_0)\|_\infty \geq \varepsilon$, para todo j. Esto implica que para cada j existe $x_j \in X$ de forma que $\|f(x_j, y_{i_j}) - f(x_j, y_0)\| > \varepsilon/2$; lo cual implica que $\{x_j\}_j \subset K$. Pasando a una subred podemos asumir que $\{x_j\}_j$ es convergente, a un cierto x. Luego la continuidad de las operaciones de $\mathcal{B}$ implica que

$$\varepsilon/2 \leq \liminf_j \|f(x_j, y_{i_j}) - f(x_j, y_0)\| = \|f(x, y_0) - f(x, y_0)\| = 0,$$

lo que es absurdo.

Pasemos a probar 2. La función f de 2. cumple, por definición, que $f(x, y) \in \mathcal{B}_x$, lo que nos dice que es una $Y-$sección. Para mostrar que tiene soporte $Y-$localmente controlado fijemos $y_0 \in Y$. La hipótesis implica que existen un entorno U de y_0 y un compacto $K \subset X$ de forma que $g(x, y, z) = 0$ si $(x, y, z) \in (X - K) \times U \times Z$. Luego, si $(x, y) \in (X - K) \times U$ entonces $f(x, y) = \int_Z g(x, y, z)\, d\mu(z) = \int_Z 0\, d\mu(z) = 0$.

Ahora tan sólo nos resta mostrar que f es continua, lo que haremos localmente. Fijemos $(x_0, y_0) \in X \times Y$ y tomemos un entorno U de (x_0, y_0) y un compacto $L \subset Z$ como en (b). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $U = V \times W$, siendo V un entorno compacto de x_0 y W un entorno de y_0. Sea $\mathcal{B}_V = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in V}$ la restricción de $\mathcal{B}$ a V o, equivalentemente, la retracción por la inclusión canónica $V \subset X$ (ver [FD88, II 13.3]). Sea $h\colon V \times U \times Z \to \mathcal{B}_V$ la restricción de g. Luego h es una $U \times Z-$sección continua de soporte localmente acotados y por lo tanto $H\colon U \times Z \to C_c(\mathcal{B}_V) = C(\mathcal{B}_V)$, $H(y, z)(x) = h(x, y, z)$, es continua en la topología del límite inductivo; que coincide con la topología de la convergencia uniforme en $C_c(\mathcal{B}_V)$ porque V es compacto.

Usando 1. para el fibrado trivial $C(\mathcal{B}_V) \times Z$ deducimos que $H'\colon U \to C_c(Z, C(\mathcal{B}_V))$, $H'(y)(z) = H(y, z)$, es continua. Además, por construcción, $\mathrm{sop}(H'(y)) \subset L$, para todo $y \in U$. Luego la imagen de H' está contenida en $C_L(Z, C(\mathcal{B}_V))$. Por otra parte la integración $C_L(Z, C(\mathcal{B}_V)) \to C(\mathcal{B}_V)$ es continua (es lineal y Lipschitziana), por lo tanto $IH\colon U \to C(\mathcal{B}_V)$, $IH(y) = \int_Z H'(y)(z)\, d\mu(z)$, es continua.

Fijado $x \in V$ la evaluación $\mathrm{ev}_x \colon C(\mathcal{B}_V) \to \mathcal{B}_x$, $\mathrm{ev}_x(w) = w(x)$, es lineal y contractiva; lo que implica que

$$\begin{aligned} IH(y)(x) &= \mathrm{ev}_x(IH(y)) = \int_Z \mathrm{ev}_x(H'(y,z))\, d\mu(z) = \int_Z h(x,y,z)\, d\mu(z) \\ &= \int_Z g(x,y,z)\, d\mu(z) = G(x,y); \end{aligned}$$

si $(x,y) \in V \times W$.

Veamos que lo anterior implica que G es continua en (x_0,y_0). Asumamos que la red $\{(x_j,y_j)\}_j$ converge a (x_0,y_0). Sin pérdida de generalidad (para demostrar la continuidad de G) podemos asumir que la red está contenida en $V \times W$. Por un dado $\|G(x_j,y_j) - G(x_j,y_0)\| \leq \|IH(y_j) - IH(y_0)\| \to 0$ y $G(x_j,y_0) = IH(y_0)(x_j) \to IH(y_0)(x_0) = G(x_0,y_0)$ en $\mathcal{B}_V$ y por lo tanto en $\mathcal{B}$. Luego [FD88, II 13.2] implica que $G(x_j,y_j) \to G(x_0,y_0)$ en $\mathcal{B}$. El resto se deduce de 1. $\square$

Apéndice B

Equivalencia de Morita

En general en los Teoremas de Imprimitividad se construye un bimódulo de equivalencia entre dos productos cruzados plenos. Estos productos cruzados se obtienen como C*-completaciones de *-álgebras que, en general, admiten más de una C*-norma. Aquí queremos explicar cómo pensamos las completaciones con las diferentes normas.

Las ideas presentadas aquí se deben a F. Abadie, quien me ha autorizado a incluirlas en este trabajo porque al momento de la redacción del mismo los resultados no han sido publicados.

Definición B.1. Sean A y B $*-$álgebras (complejas). Diremos que M es un $A-B-$prebimódulo de equivalencia si M es un $A-B-$bimódulo y existen operaciones, llamadas quasi-productos internos, ${}_A\langle\ ,\ \rangle\colon M\times M\to A$ y $\langle\ ,\ \rangle_B\colon M\times M\to B$ tales que:

(1) ${}_A\langle\ ,\ \rangle$ es $A-$lineal en la primer variable y $\langle\ ,\ \rangle_B$ es $B-$lineal en la segunda.

(2) Para todo $x,y,z\in M$ se cumple que

$$ {}_A\langle x,y\rangle^* = {}_A\langle y,x\rangle, \quad \langle x,y\rangle_B{}^* = \langle y,x\rangle_B \quad \text{y} \quad {}_A\langle x,y\rangle z = x\langle y,z\rangle_B. $$

(3) Para todo $x\in M$ se tiene: $x=0 \Leftrightarrow {}_A\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle_B = 0$.

(4) Para todo $a\in A$ y $b\in B$ se tiene: $a=0\Leftrightarrow a^*a=0$ y $b=0\Leftrightarrow b^*b=0$.

(5) $A=\operatorname{span}{}_A\langle M,M\rangle$ y $B=\operatorname{span}\langle M,M\rangle_B$.

Definición B.2. Supongamos que M es un $A-B-$prebimódulo de equivalencia y que $\|\ \|$ es una C*-norma en A. Diremos que $\|\ \|$ es

- *de Cauchy-Schwarz* (con respecto a M) si para todo $x, y \in M$ se cumple que $\|{}_A\langle x, y\rangle\|^2 \leq \|{}_A\langle x, x\rangle\|\|{}_A\langle y, y\rangle\|$.
- *positiva* (con respecto a M) si para todo $x \in M$ ${}_A\langle x, x\rangle$ es positivo en la C*-completación de A con respecto a $\|\ \|$, que denotaremos $A^{\|\ \|}$.

Las normas de Cauchy-Schwarz y positivas de B con respecto a M se definen análogamente. El conjunto formado por las C*-normas de Cauchy-Schwarz de A con respecto a M será denotado $\mathcal{CS}_M(A)$ y el de las positivas $\mathcal{P}_M(A)$.

Observación B.3. Es un hecho conocido, ver por ejemplo [RW98], que $\mathcal{P}_M(A) \subset \mathcal{CS}_M(A)$.

Teorema B.4. *Dada* $\|\ \| \in \mathcal{CS}_M(B)$ *la función* $\|\ \|_M \colon M \to \mathbb{R}$, $\|x\|_M := \|\langle x, x\rangle_B\|^{1/2}$, *es una norma en* M *y* ${}_A\|\ \| \colon A \to \mathbb{R}$, ${}_A\|a\| := \sup\{\|ax\|_M \colon x \in M, \|x\| \leq 1\}$, *es una C*-norma de Cauchy-Schwarz.*

La función $\Psi \colon \mathcal{CS}_M(B) \to \mathcal{CS}_M(A)$, $\|\ \| \mapsto {}_A\|\ \|$, *es una biyección que preserva el orden y* $\Psi(\mathcal{P}_M(B)) = \mathcal{P}_M(A)$. *Además para cada* $\|\ \| \in \mathcal{CS}_M(B)$ *se tiene que* $A^{\Psi(\|\ \|)}$ *es Morita equivalente a* $B^{\|\ \|}$.

Demostración. Fijemos $\|\ \| \in \mathcal{CS}_M(B)$. Para cada $x \in M$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $\|\lambda x\|_M = \|\langle \lambda x, \lambda x\rangle_B\|^{1/2} = \||\lambda|^2\langle x, x\rangle_B\|^{1/2} = |\lambda|\|x\|_M$. Además, si $y \in M$ entonces

$$\begin{aligned}\|x+y\|_M{}^2 &\leq \|\langle x, x\rangle_B\| + 2\|\langle x, y\rangle_B\| + \|\langle y, y\rangle_B\| \leq \|x\|_M{}^2 + 2\|x\|_M\|y\|_M + \|y\|_M{}^2 \\ &= (\|x\|_M + \|y\|_M)^2,\end{aligned}$$

lo que implica la desigualdad triangular para $\|\ \|_M$. Además $x = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle_B = 0 \Leftrightarrow \|\langle x, x\rangle_B\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|_M = 0$; con lo que terminamos de mostrar que $\|\ \|_M$ es una norma.

Mostremos ahora que $\|x\langle y, z\rangle_B\|_M \leq \|x\|_M\|y\|_M\|z\|_M$. En efecto, eso se deduce de que

$$\begin{aligned}\|x\langle y, z\rangle_B\|_M{}^2 &= \|\langle x\langle y, z\rangle_B, x\langle y, z\rangle_B\rangle_B\| = \|\langle y, z\rangle_B{}^*\langle x, x\rangle_B\langle y, z\rangle_B\| \\ &\leq \|\langle y, z\rangle_B\|^2\|x\|_M \leq \|x\|_M{}^2\|y\|_M{}^2\|z\|_M{}^2.\end{aligned}$$

Por otro lado $\|x\langle x, x\rangle_B\| = \|x\|_M{}^3$ porque, debido a que $\langle x, x\rangle_B$ es autoadjunto:

$$\|x\langle x, x\rangle_B\|^3 = \|\langle x, x\rangle_B\langle x, x\rangle_B\langle x, x\rangle_B\| = \|\langle x, x\rangle_B\|^3 = \|x\|_M{}^6.$$

Para mostrar que ${}_A\|\ \|$ es una norma comenzamos por mostrar que cada $a \in A$ actúa en M como un operador lineal acotado con respecto a $\|\ \|_M$. Puesto que $A = \operatorname{span}{}_A\langle M, M\rangle$ basta mostrar que cada $a = {}_A\langle x, y\rangle$ actúa como un operador acotado, lo cual es verdad porque para cada $z \in M$ se cumple que $\|{}_A\langle x, y\rangle z\|_M = \|x\langle y, z\rangle_B\|_M \leq \|x\|_M\|y\|_M\|z\|_M$;

lo que también muestra que ${}_A\|{}_A\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|_M\|y\|_M$. De esto concluimos que ${}_A\|\ \|$ es una seminorma en A pues no sabemos que si a actúa como el operador lineal nulo en M entonces $a=0$.

Supongamos que $a=\sum_{j=1}^{n} {}_A\langle x_j,y_j\rangle$ actúa como el operador lineal nulo en M. Luego $0=\sum_{k=1}^{n} {}_A\langle ax_k,y_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} {}_A\langle ax_k,y_k\rangle = a^*a$, lo que implica $a=0$. Entonces ${}_A\|\ \|$ es una norma, que es la norma de operadores.

Llamemos E a la completación de Hausdorff de M con respecto a $\|\ \|_M$, por lo que la operación ternaria $(\ ,\ ,\ )\colon M^3\to M$, $(x,y,z)=x\langle y,z\rangle_B$, se extiende por continuidad a una operación ternaria en E que llamaremos μ. Por otro lado también es posible extender $\langle\ ,\ \rangle_B$ a $E\times E$, extensión que denotaremos $\langle\ ,\ \rangle_B$. Se verifica inmediatamente que que el par $(B^{\|\ \|},\langle\ ,\ \rangle_B)$ satisface las condiciones de [Zet83, Proposición 3.2]. Definamos $A_a(E)$ tal como en [Zet83, Definición 3.3]. De [Zet83, Proposición 3.4] y de lo mostrado anteriormente deducimos que existe un único *-homomorfismo $\iota\colon A\to A_a(E)$ tal que $\iota({}_A\langle x,y\rangle)z={}_A\langle x,y\rangle z$. Lo que probamos antes implica que ι es una isometría, luego ${}_A\|\ \|$ es una C*-norma porque $A_a(E)$ es una C*-álgebra. Es evidente que $A^{{}_A\|\ \|}$ es isomorfa a la C*-álgebra B de [Zet83, Proposición 3.4].

En el lenguaje desarrollado en [Aba03] para los C*-anillos ternarios estamos diciendo que $E^l=A^{{}_A\|\ \|}$ y que $E^r=B^{\|\ \|}$. Esto implica, implícitamente, que ${}_A\|\ \|\in\mathcal{CS}_M(B)$. El Teorema de Representación de Zettl [Zet83, Teorema 3.1] nos dice que ${}_A\|\ \|\in\mathcal{P}_M(A)$ siempre que $\|\ \|\in\mathcal{P}_M(B)$.

Veamos la afirmación correspondiente a la equivalencia de Morita. De acuerdo al Teorema de Representación de Zettl $E=E^+\oplus E^-$ con $(E^+,\mu|_{E^+})$ y $(E^-,\mu|_{E^-})$ isomorfos a TRO. Sea $-E^-$ el C*-anillo ternario que coincide con E^- como espacio de Banach pero cuya operación ternaria es $-\mu|_{E^-}$. Por [Zet83, Proposición 3.2] se tiene que $(-E^-)^r=(E^-)^r$ y $(-E^-)^l=(E^-)^l$. Además $|E|:=E^+\oplus(-E^-)$ es isomorfo a un TRO y $|E|^r=(E^+)^r\oplus(-E^-)^r=E^r=B^{\|\ \|}$ y, análogamente, $|E|^l=E^l=A^{\Psi(\|\ \|)}$. Luego $|E|$ es un $A^{\Psi(\|\ \|)}-B^{\|\ \|}-$bimódulo de equivalencia de Morita.

Utilizando la simetría de las operaciones de M con respecto a A y B y que todos los argumentos expresados hasta aquí respetan esta simetría concluimos que para cada $\gamma\in\mathcal{CS}_M(A)$ la función $\gamma_M\colon M\to\mathbb{R}$, $\gamma_M(x):=\gamma({}_A\langle x,x\rangle)^{1/2}$, es una norma en M y $\gamma_B\colon B\to\mathbb{R}$, $\gamma_B(b):=\sum\{\gamma_M(xb)\colon x\in M,\gamma_M(x)\leq 1\}$, es una C*-norma en B.

Veamos ahora que $({}_A\|\ \|)_B=\|\ \|$, para toda $\|\ \|\in\mathcal{CS}_M(B)$. La norma que define ${}_A\|\ \|$ en M coincide con la definida por $\|\ \|$ por [Zet83, Proposiciones 3.2 y 3.4] y por las construcciones de ese artículo es la norma de M (más precisamente de E) es la que determina la norma en A, por lo tanto debe ser $({}_A\|\ \|)_B={}_A\|\ \|$.

Hasta ahora hemos mostrado que Ψ es una biyección y que $\Psi(\mathcal{P}_M(B)) = \mathcal{P}_M(A)$. Para mostrar que Ψ preserva el orden basta con observar que si $\| \ \|, \| \ \|' \in \mathcal{CS}_M(B)$ y $\| \ \| \leq \| \ \|'$ entonces $\| \ \|_M \leq \| \ \|'_M$, lo que implica inmediatamente que $\Psi(\| \ \|) \leq \Psi(\| \ \|')$. $\square$

Hay un criterio para determinar cuándo una C*-norma de un anillo ternario proviene de una norma de Cauchy-Schwarz.

Proposición B.5. *Supongamos que M es un $A-B-$prebimódulo de equivalencia y que $\| \ \|$ es una norma en M tal que $\|x\langle y,z\rangle_A\| \leq \|x\|\|y\|\|z\|$ y $\|(x,x,x)\| = \|x\|^3$, para todo $x,y,z \in M$. Luego las funciones*

$$
\begin{aligned}
{}_A\| \ \| \colon A \to [0,+\infty),\ {}_A\|a\| &:= \sup\{\|ax\| \colon x \in M, \|x\| \leq 1\} \\
\| \ \|_B \colon B \to [0,+\infty),\ \|b\|_B &:= \sup\{\|xb\| \colon x \in M, \|x\| \leq 1\}
\end{aligned}
$$

son C-normas de Cauchy-Schwarz y se cumple que $\Psi(\| \ \|_B) = {}_A\| \ \|$ y ${}_A\|{}_A\langle x,x\rangle\| = \|x\|^2 = \|\langle x,x\rangle_B\|_B$, para todo $x \in M$.*

Demostración. La completación de M con respecto a $\| \ \|$, E, es un espacio de Banach al cual podemos extender la operación ternaria de M pues aquella es acotada. Luego E es un C*-anillo ternario y como vimos anteriormente podemos pensar $A \subset E^l$ y $B \subset E^r$. Dado que M es denso en E las normas ${}_A\| \ \|$ y $\| \ \|_B$ son exactamente las restricciones de las normas de E^l y E^r, por lo que son C*-normas. Es resto se deduce directamente del Teorema anterior. $\square$

Los resultados anteriores sugieren definir las normas de Cauchy-Schwarz de M (o C*-normas) como aquellas normas $\| \ \|$ tales que $\|x\langle y,z\rangle_B\| \leq \|x\|\|y\|\|z\|$ y $\|x\langle x,x\rangle_B\| = \|x\|^3$, para todo $x,y,z \in M$. Mientras que las normas positivas serían las C*-normas $\| \ \|$ tales que $\| \ \|_B$ es positiva con respecto a M, lo que equivale a que ${}_A\| \ \|$ sea positiva.

Ahora pasamos a considerar los $*-$homomorfismos entre prebimódulos de equivalencias. Con ellos es posible deducir (inmediatamente) que las normas de Cauchy-Schwarz y las normas positivas de M dependen únicamente de M en cuanto espacio vectorial y de la operación $(x,y,z) := x\langle y,z\rangle_B$ y no de las álgebras A y B (sino sólo de su clase de isomorfismo).

Definición B.6. Supongamos que M y N son $A-B$ y $C-D$ bimódulos de equivalencia. Una función $\phi \colon M \to N$ es un $*-$*homomorfismo* si es lineal y para todo $x,y,z \in M$ se cumple que $\phi(x\langle y,z\rangle_B) = \phi(x)\langle \phi(y),\phi(z)\rangle_D$ o, lo que es lo mismo, $\phi({}_A\langle x,y\rangle z) = {}_C\langle \phi(x),\phi(y)\rangle\phi(z)$.

Proposición B.7. *Si M y N son $A-B$ y $C-D$ prebimódulos de equivalencia entonces para cada $*-$homomorfismo $\phi\colon M\to N$ existen únicos $*-$homomorfismos (de álgebras) $\phi^l\colon A\to C$ y $\phi^r\colon B\to D$ tales que $\phi^l({}_A\langle x,y\rangle)={}_C\langle\phi(x),\phi(y)\rangle$ y $\phi^r(\langle x,y\rangle_B)=\langle\phi(x),\phi(y)\rangle_D$. Además si ϕ es sobreyectiva entonces ϕ^l y ϕ^r lo son y, por otro lado, ϕ es inyectiva $\Leftrightarrow$ ϕ^l es inyectiva $\Leftrightarrow$ ϕ^r es inyectiva.*

Demostración. La unicidad es inmediata porque las álgebras están generadas por la imagen de los pseudo producto internos. Mostraremos la existencia de tan sólo ϕ^r pues la de ϕ^l es análoga. Basta con mostrar que dados $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in M$ se cumple que $d:=\sum_i\langle\phi(x_i),\phi(y_i)\rangle_D$ es nulo siempre que $b:=\sum_i\langle x_i,y_i\rangle_B$ es nulo. Si $b=0$ entonces

$$\begin{aligned}d^*d&=\sum_{i,j}\langle\phi(y_i),\phi(x_i)\rangle_C\langle\phi(x_j),\phi(y_j)\rangle_C=\sum_i\langle\phi(y_i),\sum_j\phi(x_i)\langle\phi(x_j),\phi(y_j)\rangle_C\rangle_C\\&=\sum_i\langle\phi(y_i),\phi(x_i\sum_j\langle x_j,y_j\rangle_B)\rangle_C=\sum_i\langle\phi(y_i),\phi(x_ib)\rangle_C=0,\end{aligned}$$

de donde deducimos que $d=0$.

Habiendo mostrado la existencia de ϕ^r asumamos que ϕ es sobreyectiva, en ese caso ϕ^r es sobreyectiva pues $\phi^r(B)=\phi^r(\operatorname{span}\langle M,M\rangle_B)=\operatorname{span}\langle\phi(M),\phi(M)\rangle_D=N$.

En caso que ϕ^r sea inyectiva ϕ lo es porque si $\phi(x)=0$ entonces $\phi^r(\langle x,x\rangle_D)=0$ y ello implica que $\langle x,x\rangle_D=0$. Luego $x=0$. Recíprocamente, si ϕ es inyectiva tomemos b y d como arriba. Debemos mostrar que $d=0$ implica $b=0$. Para todo $x\in M$ se tiene que $\phi(xb)=\phi(\sum_i x\langle x_i,y_i\rangle_B)=\phi(x)d=0$, luego $xb=0$. Entonces $b^*b=\sum_i\langle y_i,x_ib\rangle_B=0$, lo que implica $b=0$. $\square$

Corolario B.8. *Si $\phi\colon M\to N$ y $\psi\colon N\to O$ son $*-$homomorfismos de prebimódulos de equivalencia entonces $\psi\circ\phi$ también es un $*-$homomorfismo y se cumple que $(\psi\circ\phi)^r=\psi^r\circ\phi^r$ y que $(\psi\circ\phi)^l=\psi^l\circ\phi^l$. En caso que ϕ sea biyectivo ϕ^{-1} es un $*-$homomorfismo, $(\phi^r)^{-1}=(\phi^{-1})^r$ y $(\phi^l)^{-1}=(\phi^{-1})^l$.*

A continuación veremos que las álgebras A y B que hacen al espacio M un prebimódulo de equivalencia están determinadas, a menos de isomorfismos, por la operación

$$(\ ,\ ,\ )\colon M^3\to M,(x,y,z):=x\langle y,z\rangle_B.$$

Definición B.9. Diremos que $(M,(\ ,\ ,\ ))$ es un *anillo ternario* si M es un espacio vectorial complejo y $(\ ,\ ,\ )\colon M^3\to M$ es una función lineal en las variables impares, conjugado lineal en la segunda variable y para todo $u,v,w,x,y\in M$ se cumple que

$$((u,v,w),x,y)=(u,(x,w,v),y)=(u,v,(w,x,y))\text{ y, además, }(x,x,x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0.$$

Ejemplo B.1. Si M es un $A-B-$prebimódulo de equivalencia y se define $(x,y,z) := x\langle y,z\rangle_B$ entonces $(M,(\ ,\ ,\ ))$ es un anillo ternario.

Excepto por la última condición las demás se verifican inmediatamente. Si $x \in M$ y $(x,x,x) = x\langle x,x\rangle_B = 0$ entonces $0 = \langle x, x\langle x,x\rangle_B\rangle_B = (\langle x,x\rangle_B)^*\langle x,x\rangle_B$, lo que implica $\langle x,x\rangle_B = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

Observación B.10. Para todo anillo ternario $(M,(\ ,\ ,\ ))$ y todo $x,y \in M$ la igualdad $x = y$ es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

- $(x,u,v) = (y,u,v)$ para todo $u,v \in M$.
- $(u,x,v) = (u,y,v)$ para todo $u,v \in M$.
- $(u,v,x) = (u,v,y)$ para todo $u,v \in M$.

La linealidad de las operaciones implica que la igualdad $x = y$ implica todas las demás condiciones. En cambio si se cumple la primera entonces $(x-y,u,v) = 0$ para todo $u,v \in M$. En particular para $u = v = x-y$ obtenemos $(x-y,x-y,x-y) = 0$, lo que implica $x-y = 0$.

Teorema B.11. *Para cada anillo ternario $(M,(\ ,\ ,\ ))$ existen $*$-álgebras M^l y M^r de forma que M es un $M^l - M^r-$prebimódulo de equivalencia y para todo $x,y,z \in M$: $(x,y,z) = {}_{M^l}\langle x,y\rangle z = z\langle y,z\rangle_{M^r}$.*

Si, además, A y B son $*$-álgebras de forma que M es un $A-B-$bimódulo de equivalencia y para todo $x,y,z \in M$ se cumple que $(x,y,z) = z\langle y,z\rangle_B$; entonces existen únicos isomorfismos de $*-$álgebras $\iota\colon M^l \to A$ y $\kappa\colon M^r \to B$ tales que $\iota({}_{M^l}\langle x,y\rangle) = {}_A\langle x,y\rangle$ y $\kappa(\langle x,y\rangle_{M^l}) = \langle x,y\rangle_B$, para todo $x,y \in M$.

Demostración. Sea $L(M)$ el conjunto formado por las transformaciones lineales de M en M, con su estructura natural de álgebra, y $L_a(M)$ el conjunto formado por las $T \in L(M)$ para las cuales existen $S \in L(M)$ de forma que $(x,Ty,z) = (x,y,Sz)$, para todo $x,y,z \in M$. Es fácil mostrar que $L_a(M)$ es una subálgebra de $L(M)$ y para equiparla con una involución mostremos que el operador S de arriba depende únicamente de T (la involución será $T^* := S$).

Supongamos que dada $T \in L_a(M)$ tenemos $R,S \in L(M)$ tales que

$$(x,Ty,z) = (x,y,Rz) = (x,y,Sz),\ \forall\ x,y,z \in M.$$

Luego para todo $x,y,z \in M$:

$$(x,y,Rz-Sz) = (x,y,Rz) - (x,y,Sz) = (x,Ty,z) - (x,Ty,z) = 0.$$

Lo que implica $R = S$. Para cada $T \in L_a(M)$ definimos $T^* \in L(M)$ como el único elemento de $L(M)$ que satisface $(x, Ty, z) = (x, y, T^*z)$, para todo $x, y, z \in M$.

Probemos que $T^* \in L_a(M)$. Dados $u, v, w, x, y, z \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned}(u,(x,T^*y,z),v) &= (u,(x,T^*y,z),v) = ((u,z,T^*(y)),x,v) = ((u,Tz,y),x,v)\\ &= (u,(x,y,Tz),v).\end{aligned}$$

Luego $(x, T^*y, z) = (x, y, Tz)$ y $T^{**} = T$. El lector puede verificar que $L_a(M)$ es una *-álgebra con cálculos como $(x, TSy, z) = (x, Sy, T^*z) = (x, y, S^*T^*z)$, el cual muestra que $(TS)^* = S^*T^*$.

Mostremos que $T^*T = 0$ implica que $T = 0$, pues esto probará (4) de la Definición B.1. En efecto, si $T^*T = 0$ entonces para todo $x \in M$ $(Tx, Tx, Tx) = (xTx, x, T^*Tx) = 0$, lo que implica $Tx = 0$.

Dados $x, y \in M$ definamos $[x, y]\colon M \to M$ como $[x, y](z) = (x, y, z)$. Se tiene $[x, y] \in L_a(M)$ pues $(u, [x, y]v, w) = (u, (x, y, v), w) = (u, v, (y, x, w)) = (u, v, [y, x]w)$, lo que también muestra que $[x, y]^* = [y, x]$. Además $[x, y][z, t] = [[x, y]z, t]$ porque

$$[x,y][z,t]u = (x,y,(z,t,u)) = ((x,y,z),t,u) = [[x,y]z,t]u.$$

Esto implica que $M^l := \operatorname{span}\{[x, y]\colon x, y \in M\}$ es una *-subálgebra de $L_a(M)$. Definamos ${}_{M^l}\langle x, y\rangle := [x, y]$, por lo cual es evidente que ${}_{M^l}\langle x, y\rangle = (x, y, z)$. Tenemos que M es un $A-$módulo porque

$$[x,y]([z,t]u) = (x,y,(z,t,u)) = ((x,y,z),t,u) = [[x,y]z,t]u = ([x,y][z,t])u$$

y porque M^l está generado por los elementos de la forma $[x, y]$. Todas las propiedades de la Definición B.1 que hacen referencia a M^l se verifican inmediatamente a partir de lo expuesto hasta aquí, por lo que pasamos a construir M^r.

Sea $(N, (\ ,\ ,\ )')$ el anillo ternario tal que $N = M$ (como espacio vectorial complejo) y $(x, y, z)' = (z, y, x)$ y definamos M^r como la $*-$álgebra opuesta conjugada de N^l y $\langle x, y\rangle_{M^r} := {}_{N^l}\langle x, y\rangle$. La acción de M^r en M está dada por $xb := b^*x$ (lo cual tiene sentido porque $N = M$ y $b^* \in L_a(N) \subset L(M)$). Luego $x\langle y, z\rangle_{M^l} = ({}_{N^l}\langle y, z\rangle)^*x = (z, y, x)' = (x, y, z)$, y esta igualdad implica que $\langle\ ,\ \rangle_{M^l}$ es lineal en la segunda variable. Además

$$\langle x,y\rangle_{M^r}\langle z,w\rangle_{M^r} = {}_{N^l}\langle x,y\rangle_{N^l}\langle z,w\rangle = {}_{N^l}\langle x,({}_{N^l}\langle z,w\rangle)^*y\rangle = \langle x,y\langle z,w\rangle_{M^r}\rangle_{M^r},$$

de lo que se deduce que $\langle\ ,\ \rangle_{M^l}$ es M^l-lineal en la segunda variable. Por otro lado $(xb)c = c^*(b^*x) = (bc)^*x = x(bc)$, para todo $b, c \in M^r$ y $x \in M$. La compatibilidad de las estructuras de M^l y M^r bimódulo queda demostrada porque: $M^l = \operatorname{span}_{M^l}\langle M, M\rangle$, $M^r = \operatorname{span}\langle M, M\rangle_{M^r}$ y

$$({}_{M^l}\langle x, y\rangle z)\langle u, v\rangle_{M^r} = ((x, y, z), u, v) = (x, y, (z, u, v)) = {}_{M^l}\langle x, y\rangle(z\langle u, v\rangle_{M^r}).$$

Habiendo mostrado la primer parte del enunciado pasamos a la segunda. Sea $\phi\colon M \to M$ la identidad. Evidente que $\phi(x\langle y, z\rangle_{M^r}) = (x, y, z) = x\langle y, z\rangle_B$, para todo $x, y, z \in M$. Entonces $\iota := \phi^l$ y $\kappa := \phi^r$ son los isomorfismos buscados. □

Cerramos este apéndice con un resultado que permite, en ocasiones, determinar si una $*$-álgebra tiene una única C*-norma.

Lema B.12. *Si A es una $*-$álgebra, B una C*-álgebra y $\phi\colon A \to B$ un $*-$homomorfismo inyectivo de manera que $\phi(A)$ es un $*-$ideal algebraico (no necesariamente cerrado) de B entonces $\|\ \|_A\colon A \to \mathbb{R},\ a \mapsto \|\phi(a)\|$, es la única C*-norma de A.*

Demostración. Es inmediato que $\|\ \|_A$ es una C*-norma en A. Para mostrar el recíproco tomemos otra C*-norma en A, que llamaremos $\|\ \|'$. Completando A con respecto a $\|\ \|'$ y usando el Teorema de Gelfand-Naimark obtenemos una *-representación no degenerada como operadores en un espacio de Hilbert $\pi\colon A \to \mathbb{B}(H)$ de manera que $\|\pi(a)\| = \|a\|'$.

Como $\pi\circ\phi^{-1}\colon \phi(A) \to \mathbb{B}(H)$ es una $*-$representación existe [FD88, VI 19.11] una única extensión de $\pi\circ\phi^{-1}$ a B, que llamamos ρ. Sabemos que ρ es inyectiva en $\phi(A)$ porque π es inyectiva. Luego ρ es inyectiva en $\overline{\phi(A)}$ porque el hecho de que $\phi(A)$ es un ideal de B implica que para todo $b \in \overline{\phi(A)}$ se cumple

$$\rho(b) = 0 \Leftrightarrow \rho(b)\rho(\phi(a)) = 0\,\forall a \in A \Leftrightarrow b\phi(a) = 0\,\forall a \in A \Leftrightarrow b\overline{\phi(A)} = \{0\} \Leftrightarrow b = 0.$$

Los $*-$homomorfismos inyectivos entre C*-álgebras son isometrías por lo que para todo $a \in A$ se tiene que $\|a\|_A = \|\phi(a)\| = \|\rho(\phi(a))\| = \|\pi(a)\| = \|a\|'$. □

Del Lema anterior se deduce que para cada espacio HLC X la única C*-norma de $C_c(X)$ es la norma del supremo. También implica que para cada módulo de Hilbert $\mathcal{X}$ la $*$-álgebra $\mathbb{F}(\mathcal{X}) := \operatorname{span}\{|x\rangle\langle y|\colon x, y \in \mathcal{X}\} \subset \mathbb{B}(\mathcal{X})$ tiene una única C*-norma, que es la norma de operadores. El hecho de que $\operatorname{span}\langle\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle$ sea un ideal en una C*-álgebra implica lo siguiente.

Corolario B.13. *Cada $A-$módulo de Hilbert $\mathcal{X}$ (pleno o no) tiene una única norma κ tal que $\kappa(x\langle y, z\rangle_A) \le \kappa(x)\kappa(y)\kappa(z)$ y $\kappa(x\langle x, x\rangle_A) = \kappa(x)^3$, para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$. Además esa norma es $\|x\| := \|\langle x, x\rangle_A\|^{1/2}$.*

Índice alfabético

Bibliografía

[Aba99] Fernando Abadie. *Sobre Ações Parciais, Fibrados de Fell, e Grupóides.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, September 1999.

[Aba03] Fernando Abadie. Enveloping actions and Takai duality for partial actions. *J. Funct. Anal.*, 197(1):14–67, 2003.

[Aba04] Fernando Abadie. On partial actions and groupoids. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(4):1037–1047 (electronic), 2004.

[AMP09] Fernando Abadie and Laura Martí Pérez. On the amenability of partial and enveloping actions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(11):3689–3693, 2009.

[BE13] Alcides Buss and Siegfried Echterhoff. Imprimitivity theorems for weakly proper actions of locally compact groups. *arXiv preprint arXiv:1305.5100*, 2013.

[BE14] Alcides Buss and Siegfried Echterhoff. Universal and exotic generalized fixed-point algebras for weakly proper actions and duality. *Indiana Univ. Math. J.*, 63:1659–1701, 2014.

[BM13] Alcides Buss and Ralf Meyer. Crossed products for actions of crossed modules on C*-algebras. *arXiv preprint arXiv:1304.6540*, 2013.

[Bou66] Nicolas Bourbaki. General topology, part 1. *Hermann, Paris and Addison-Wesley*, 1966.

[Bro77] Lawrence Brown. Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C*-algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 71(2):335–348, 1977.

[CMW84] Raúl E Curto, Paul S Muhly, and Dana P Williams. Cross products of strongly morita equivalent C*-algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 90(4):528–530, 1984.

[DDRS07] Michael Dokuchaev, Ángel Del Río, and Juan Simón. Globalizations of partial actions on nonunital rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(2):343–352, 2007.

[DE05] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(5):1931–1952, 2005.

[EL99] Ruy Exel and Marcelo Laca. Cuntz-Krieger algebras for infinite matrices. *J. Reine Angew. Math.*, 512:119–172, 1999.

[ELQ02] Ruy Exel, Marcelo Laca, and John Quigg. Partial dynamical systems and C*-algebras generated by partial isometries. *J. Operator Theory*, 47(1):169–186, 2002.

[EN] Ruy Exel and Chi-Keung Ng. Approximation property of C*-algebraic bundles. *arXiv arXiv:math/9906070v1.*

[EN02] Ruy Exel and Chi-Keung Ng. Approximation property of C*-algebraic bundles. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 132:509–522, 5 2002.

[Exe94a] R. Exel. The bunce-deddens algebras as crossed products by partial automorphisms. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 25(2):173–179, 1994.

[Exe94b] Ruy Exel. The Bunce-Deddens algebras as crossed products by partial automorphisms. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 25(2):173–179, 1994.

[Exe94c] Ruy Exel. Circle actions on C*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence. *J. Funct. Anal.*, 122(2):361–401, 1994.

[Exe95] Ruy Exel. Approximately finite C*-algebras and partial automorphisms. *Math. Scand.*, 77(2):281–288, 1995.

[Exe97] Ruy Exel. Twisted partial actions: a classification of regular C*-algebraic bundles. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 74(2):417–443, 1997.

[Exe00] Ruy Exel. Morita–Rieffel equivalence and spectral theory for integrable automorphism groups of c*-algebras. *Journal of Functional Analysis*, 172(2):404–465, 2000.

[Exe14] Ruy Exel. *Partial Dynamical Systems Fell Bundles and Applications.* 2014.

[FD88] J. M. G. Fell and R. S. Doran. *Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles.*, volume 125–126 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[Fer11] Damián Ferraro. Álgebras inducidas por acciones parciales, 2011. Master Thesis.

[HR63] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis I. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 115, 1963.

[Kas88] G.G. Kasparov. Equivariant kk-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math.*, 91:147–201, 1988.

[Lan95] E Christopher Lance. *Hilbert C*-modules: a toolkit for operator algebraists*, volume 210. Cambridge University Press, 1995.

[LS75] Kjeld B Laursen and Allan M Sinclair. Lifting matrix units in C*-algebras II. *Mathematica Scandinavica*, 37:167–172, 1975.

[Mac49] George W Mackey. Imprimitivity for representations of locally compact groups i. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 35(9):537, 1949.

[McC95] Kevin McClanahan. K-theory for partial crossed products by discrete groups. *J. Funct. Anal.*, 130(1):77–117, 1995.

[Mey] Ralf Meyer. Equivariant kasparov theory and generalized homomorphisms. *arXiv preprint arXiv:math/0011076v1.*

[Mey01] Ralf Meyer. Generalized fixed point algebras and square-integrable groups actions. *J. Funct. Anal.*, 186(1):167–195, 2001.

[MRW87] Paul S Muhly, Jean Renault, and Dana P Williams. Equivalence and isomorphism for groupoid C*-algebras. *J. Operator Theory*, 17(1):3–22, 1987.

[Muh01] Paul S Muhly. Bundles over groupoids. *Contemporary Mathematics*, 282:67–82, 2001.

[Mur90] Gerard J Murphy. *C*-algebras and operator theory*, volume 288. Academic press Boston, 1990.

[MW08] Paul S Muhly and Dana P Williams. Equivalence and disintegration theorems for fell bundles and their C*-algebras. Technical report, Citeseer, 2008.

[Ped79] G.K. Pedersen. *C*-algebras and their automorphism groups*, volume 111. Academic press London, 1979.

[Phi89] N.C. Phillips. *Equivariant K-theory for proper actions.* Longman Scientific & Technical, 1989.

[Rae88] Iain Raeburn. Induced C*-algebras and a symmetric imprimitivity theorem. *Math. Ann.*, 280(3):369–387, 1988.

[Rie74] Marc A. Rieffel. Induced representations of C*-algebras. *Advances in Math.*, 13:176–257, 1974.

[Rie82] Marc A. Rieffel. Applications of strong Morita equivalence to transformation group C*-algebras. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, volume 38 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 299–310. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[Rie90] Marc A. Rieffel. Proper actions of groups on C*-algebras. In *Mappings of operator algebras (Philadelphia, PA, 1988)*, volume 84 of *Progr. Math.*, pages 141–182. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Rie04] Marc A. Rieffel. Integrable and proper actions on C*-algebras, and square-integrable representations of groups. *Expo. Math.*, 22(1):1–53, 2004.

[RW98] Iain Raeburn and Dana P Williams. *Morita equivalence and continuous-trace C*-algebras.* Number 60. American Mathematical Soc., 1998.

[Seh14] C. F. Sehnem. Uma classificação de fibrados de fell estáveis, 2014. Master Thesis.

[Wil07] Dana P. Williams. *Crossed products of C*-algebras*, volume 134 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[Yam91] Shigeru Yamagami. On primitive ideal spaces of C*-algebras over certain locally compact groupoids. In *Mappings of operator algebras*, pages 199–204. Springer, 1991.

[Zet83] Heinrich Zettl. A characterization of ternary rings of operators. *Advances in Mathematics*, 48(2):117–143, 1983.